Ely Brett C.
EGRESADO I.P.C.

William Suárez
EGRESADO I.U.P.E.B.

ACTIVIDADES DE MATEMÁTICA I

Cs.
C.D.

* FUNCIONES
* LOGARITMOS
* PROGRESIONES
* TRIGONOMETRÍA
* VECTORES DEL PLANO
* NÚMEROS COMPLEJOS
* ECUACIONES EXPONENCIALES

Ely Brett C.
EGRESADO I.P.C.

William Suárez
EGRESADO I.U.P.E.B.

ACTIVIDADES DE MATEMÁTICA I

Cs.
C.D.

- Funciones
- Logaritmos
- Progresiones
- Trigonometría
- Vectores del plano
- Números complejos
- Ecuaciones exponenciales

Revisión y realización
Eli Brett y William Suárez

Composición de textos
Eli Rafael Brett. C
Barquisimeto-Edo Lara

Fotolito
JOHNEVE, C.A
Caracas

IMPRESO EN VENEZUELA
Corporación Marca, S. A. Caracas, 2007. Rif N° J-00059932-7
Telf: 71-03-38

I.S.B.N. 980-3036-16-5
Depósito Legal IF0 5120015101085
Primera Edición: 2001

Segunda Edición
revisada y corregida

Caracas, 2.002

PRESENTACIÓN

Distinguidos colegas:

Dando continuación a nuestra serie de textos denominados **ACTIVIDADES DE MATEMÁTICA**, la cual fue iniciada con séptimo y octavo grados, presentamos ahora las **ACTIVIDADES DE MATEMÁTICA** para el Primero de Ciencias del Ciclo Diversificado.

El contenido del texto se ha dividido en capítulos bien diferenciados, con contenidos elaborados de forma práctica, con los imprescindibles desarrollos matemáticos que le permita a los alumnos y alumnas soltura en el cálculo.

Cada capítulo consta de partes bien diferenciadas, conteniendo los siguientes aspectos:

- Un **contenido teórico**, donde se desarrollan cada uno de los objetivos del programa partiendo de situaciones o actividades prácticas, introduciendo al alumnado en el contenido particular de cada epígrafe, con un desarrollo perfectamente ajustado tanto a los conocimientos como a las necesidades de ellos. Se desarrollan también ciertos conocimientos previos a cada contenido.
- **Ejercicios y problemas resueltos**, los cuales están presentados en algunos casos en forma de ejemplos. Ellos tienen como finalidad familiarizar a los alumnos y alumnas con los procesos de resolución de problemas, detallando cada paso y explicando todos los matices, así como también dándose algunas estrategias metodológicas para dicha resolución.
- **Actividades para resolver**, etapa en la cual se plantean ejercicios en orden gradual de dificultad y con su respectiva respuesta. Estos problemas pueden ser resueltos, bien en casa o trabajando en grupo o en el aula. Este proceso puede realizarlo los alumnos y alumnas una vez que hayan comprendido los ejercicios y problemas resueltos.
- Las **Actividades complementarias**, etapa ésta donde se plantea una selección de problemas desarrollados en cada capítulo, con el fin de ampliar y reforzar los conocimientos adquiridos.
- Se trabaja con la **calculadora**, se ejercita el cálculo mental y se dedica cierta atención a las aplicaciones de las matemáticas.

El fin general del texto es ayudar a los alumnos y alumnas a desarrollar un pensamiento lógico; a adquirir un razonamiento que les permita claridad, rigor y exactitud, permitiéndoles posteriormente resolver problemas, realizar investigaciones y estar en capacidad de enfrentarse a situaciones prácticas de la vida real.

LOS AUTORES

ÍNDICE DE CONTENIDO

UNIDAD I. FUNCIONES
Funciones reales
Capítulo 1

Capítulo 2
Función logarítmica

Capítulo 3
Aplicaciones de las propiedades de los logaritmos

ÍNDICE DE CONTENIDO

UNIDAD II. TRIGONOMETRÍA

Capítulo 4
Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Capítulo 5
Circunferencia trigonométrica

ÍNDICE DE CONTENIDO

ESTUDIO DE LAS FUNCIONES

1.1 Qué es una función

Antes, de definir función, veamos algunos ejemplos de relaciones o correspondencias que nos van a ayudar a comprender el concepto:

- Si tenemos el conjunto de automóviles que circulan por el país y, el conjunto de números de placas existentes, es posible establecer una relación entre cada automóvil y su número de placa, en donde a cada automóvil le corresponde un solo número de placa. Pueden existir números de placas que todavía no han sido asignados.

- Cuando existe una relación entre el conjunto de los productos de un supermercado y el conjunto de los precios, existe una relación en donde a cada producto le corresponde un solo precio.

- Cuando se tiene el conjunto de los ciudadanos de un país y el conjunto de los correspondientes números de cédula. A cada ciudadano le corresponde un solo número de cédula.

- A cada medida del lado de un cuadrado le corresponde su perímetro. Así, al cuadrado de lado 1 cm le corresponde un perímetro de 4 cm. Al cuadrado de lado 2 cm le corresponde un perímetro de 8 cm. Al cuadrado de lado 2,5 cm le corresponde un perímetro de 10 cm.

Cada uno de los ejemplos está referido a la relación establecida entre dos conjuntos, en donde a cada elemento del primer conjunto se le relaciona con un único elemento del segundo conjunto. Estas relaciones que cumplen con esta condición son llamadas *funciones*, permitiéndonos decir:

> Dados dos conjuntos A y B, se llama **función de A en B** a toda relación, ley o correspondencia, que asocia a **cada** elemento del conjunto A (conjunto original) un **único** elemento del conjunto B (conjunto final).

Las funciones se denotan con la letra f, escribiéndose $f: A \to B$. Se lee "f es una función de A en B".

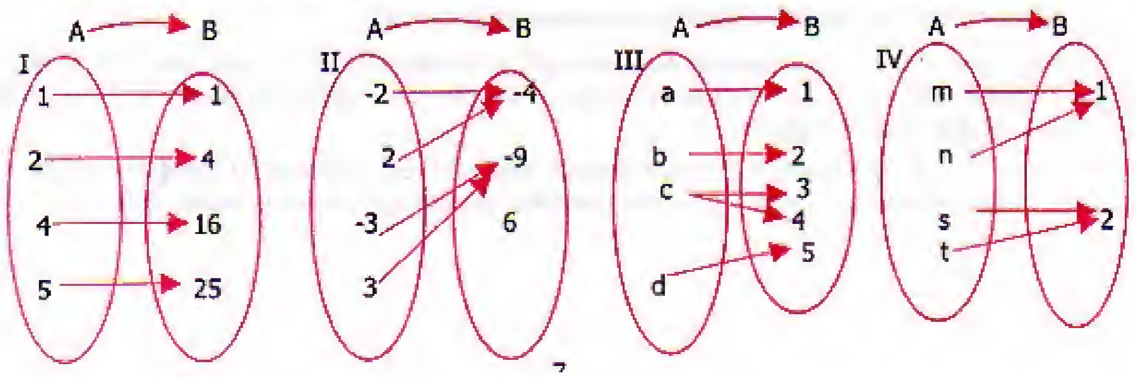
Si un elemento x del conjunto A se corresponde con un elemento del conjunto B, decimos que y es imagen de x por la función.

El conjunto A recibe el nombre de **dominio de la función** y se denota como **Dom f** y el conjunto B recibe el nombre de **conjunto de llegada** o **codominio**.

El subconjunto de B, constituido por todos los elementos que son imágenes de los elementos de A, recibe el nombre de **rango de la función**, denotándose como **Rgo f**. Puede darse el caso que en el conjunto B haya elementos que no son imagen de ningún elemento del conjunto A. Estos elementos no están en el rango de la función, pero si están en el conjunto de llegada o **codominio**

EJEMPLOS

Observemos las siguientes representaciones sagitales que representan relaciones entre A y B.



La relación **I** es una función f: A ⟶ B porque a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B.

Dom f = { 1, 2, 4, 5 } Rgo f = { 1, 4, 16, 25 } Cod f = {1, 4, 16, 25}

f(1) = 1 f(2) = 4 f(4) = 16 f(5) = 25

La relación **II** es también una función, por la misma razón anterior.

Dom f = { -2, 2, -3, 3 } Rgo f = { -4, -9 } . Nótese que 6 no es imagen de ningún elemento de A. Cod f = { -4, -9, 6 }

La relación **III** no es una función, porque al elemento c de A le corresponde dos elementos de B, el 3 y el 4. Dos elementos distintos de B están relacionados con un elemento de B.

La relación **IV** es también una función, por la misma razón de la relación **I**.

Dom f = { m, n, s, t } Rgo f = {1, 2 } . Aquí el Rgo f ≡ B.

Observaciones.

En una función, al conjunto formado por los elementos de B que están relacionados con los elementos de A se les llama **imágenes** de los elementos de A.

Así, en la función **I** las imágenes son: 1, 4, 16 y 25.

En la función **II** las imágenes son: -4 y -9, ya que 6 no es imagen de ningún elemento de A.

En la función **IV** las imágenes son 1 y 2.

Una función puede también representarse como **pares ordenados**, donde las primeras componentes de los pares son elementos del dominio y las segundas componentes son elementos del rango.

Para cada una de las relaciones que son funciones se tendrá en forma de pares ordenados que:

f_I = {(1,1), (2,4), (4,16), (5,25)} f_{II} = {(-2,-4), (-3,-9), (3,-9) f_{IV} = {(m,1), (n,1), (s,2), (t,2)}

1.2 Funciones inyectivas

Una función f: A ⟶ B es **inyectiva** si a elementos diferentes del dominio le corresponden elementos diferentes del rango.

Regresemos a los diagramas sagitales anteriores para tratar de analizar la definición de función inyectiva.

En el caso **I** puede notarse que dos elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas. Esto nos indica que la función es *inyectiva*.

En el caso **II** la función *no es inyectiva*, ya que dos elementos distintos de A (el dominio), tienen la misma imagen.

En el caso **IV** la función *no es inyectiva* por la misma razón anterior.

La función f que asigna a cada estado de Venezuela su ciudad capital *es inyectiva*. Esto se explica porque estados distintos tienen capitales distintas. Dicho de otra manera, no existe una ciudad que sea capital de dos estados distintos.

La función f: R ⟶ R, definida por la expresión $f(x) = x^3$ es *una función inyectiva* porque dos números reales distintos elevados al cubo nos permite obtener dos números reales distintos.

1.3 Funciones sobreyectivas

Una función f: A ⟶ B es **sobreyectiva** si todo elemento del codominio o conjunto de llegada es imagen de algún elemento del dominio.

Debemos insistir nuevamente en los diagramas anteriores, con el fin de analizar si representan o no funciones sobreyectivas.

En el caso **I** se tiene una **función sobreyectiva**, ya que todos los elementos del codominio (conjunto B) son imagen de al menos un elemento del dominio.

En el caso **II** la función no es sobreyectiva porque el elemento 6 no es imagen de ningún elemento del dominio.

En el caso **IV** tenemos un función sobreyectiva porque todos los elementos del codominio son imagen de al menos un elemento del dominio.

La función f: R ⟶ R definida como $f(x) = x^2$ no es sobreyectiva, porque al elevar al cuadrado cualquier número positivo o negativo se obtendrá en el codominio números estrictamente positivos, indicándonos que los números negativos no están en el conjunto de las imágenes de f.

A estas funciones, cuyo dominio y rango están constituidas por números reales **R** o subconjuntos de éste, se dice que son **funciones reales de variable real.**

1.4 Funciones biyectivas

Una función es **biyectiva** cuando es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente.

En el caso **I** la función es biyectiva, por ser inyectiva y sobreyectiva.

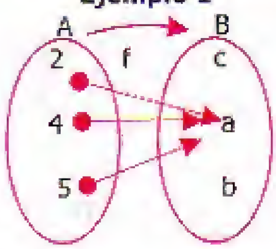
En el caso **II** la función no es ni sobreyectiva ni inyectiva.

En el caso **IV** la función es sobreyectiva pero no es inyectiva, por lo tanto no es biyectiva.

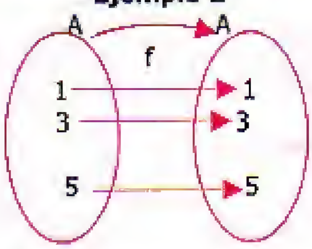
1.5 Funciones constantes

Una función f: A ⟶ B se dice que es **constante** si a cada elemento de A se asigna un mismo elemento de B. También puede decirse que el conjunto de imágenes consta de un solo elemento

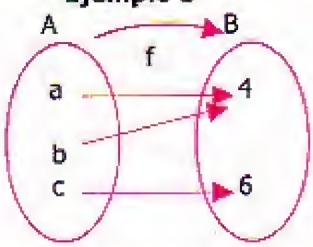
Ejemplo 1



Ejemplo 2



Ejemplo 3



En el **ejemplo 1** la función es constante porque el elemento a de **B** es única imagen de todos los elementos de A.

Nótese que f(2) = a f(4) = a f(5) = a.

Si lo escribimos en forma de pares ordenados se tendrá: f = {(2,a), (4,a), (5,a)}

1.6 Función idéntica

Se llama función **idéntica** a la función f que hace corresponder a todo elemento del dominio el mismo elemento.

En el **ejemplo 2** se muestra una función idéntica. La función idéntica es una función $f: A \to A$ quedando definida por $f(x) = x$. $f(1) = 1$, $f(3) = 3$ y $f(5) = 5$

En el **ejemplo 3** la función *es sobreyectiva,* pero no es una función constante. Esto se explica porque al elemento c se le debía haber asignado también el elemento 4.

No es inyectiva, porque dos elementos distintos del dominio, a y b tienen la misma imagen que es el 4

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.- Indica cuál o cuáles de las siguientes correspondencias son funciones. En caso de ser función cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Explica la razón.

a) La que asocia a cada número entero su doble.

b) La que asocia a cada radio de un círculo su área.

c) La que asocia a cada número natural su cuadrado.

d) La que asocia a cada número entero sus múltiplos.

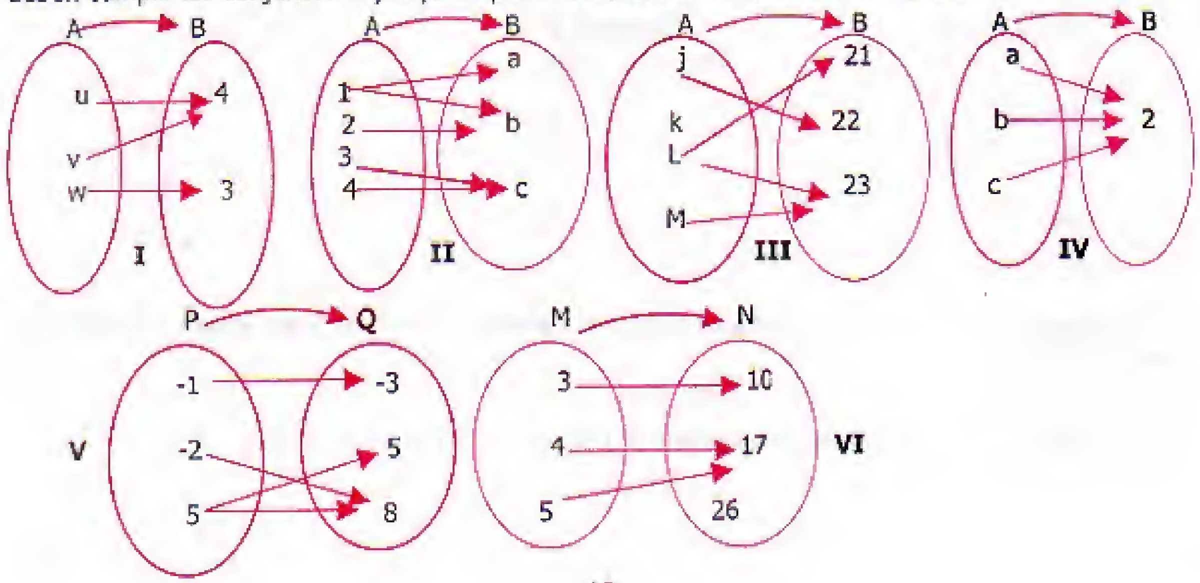
e) La que asocia a cada número natural el múltiplo de 5 más próximo a él.

f) La que asocia a cada número entero positivo sus divisores.

g) La que asocia a cada número entero su cuadrado.

h) A cada número entero le hacemos corresponder su raíz cuadrada.

2.- Observa los diagramas sagitales que están representando correspondencias entre conjuntos. Analiza cada uno y responde: a) ¿Cuáles representan funciones?. b) ¿Cuáles representan funciones inyectivas?. c) ¿Cuáles representan funciones sobreyectivas?. d) ¿Cuáles representan funciones biyectivas?. e) ¿Cuál representa una función constante? f) ¿Cuáles son funciones reales de variable real?. g) Los que sean funciones represéntalos como pares ordenados. h) ¿Qué condición deben cumplir los conjuntos M y N para que entre ellos exista una función biyectiva?.



3.-¿Una función constante puede ser inyectiva?. Explica tu razonamiento.

4.-¿Qué condición debe cumplirse para que una función constante sea sobreyectiva?.

5.- Se dan los conjuntos A = {m, n, s} y B = {3, 9}. a) Construye, usando representaciones sagitales, todas las funciones diferentes de A en B que pueden formarse. ¿Cuántas son?. b) ¿Es posible formar funciones sobreyectivas de B en A?. Explica.

6.- Dada la función f: A ⟶ B definida por $f(x) = x^2 - 1$ donde A = {-1, 1, 0, 2, -2} y B = {0, -1, -3}

a) Encontrar la imagen de cada elemento de A b) Representa la función con pares ordenados

Haz la representación sagital de la función. ¿Coincide el rango con el codominio de f?.

Establecer si la función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Explica las razones.

7.- Dado el conjunto A = {0, 1, -1, -2, 1/2} y la función definida por $f(x) = 2^x$, encontrar el conjunto de imágenes de elementos de A.

8.- Dado el conjunto H = {-1, 1/2, 0, 2 }. Sea la función f: H ⟶ R definida por $f(x) = x^2 - 1$.

a) Encontrar el conjunto de imágenes de f. b) Escribe el rango de f c) ¿Es inyectiva?. Explica.

9.-Dada la función f: Q ⟶ Q definida como $f(x) = 1 - |x|$

Hallar: a) f(1) b) f(-1) c) f(1/2) d) f(-1/2) e) ¿Por qué f no es inyectiva?

10.- Sea la función f: R ⟶ R definida por $f(x) = x^2 - 2x - 2$. Hallar:

a) f(-3) b) f(-4) c) $f(x^2)$ d) f(x+3) e) f(2) - f(-3) f) f(x + h) g) f(2x - 3) + f(x + 3)

h) f (x + h) - f(x) i) [f(x + h) - f(x)]/h j) f(f(x)

11.- Dada la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. Hallar: a) g(0); b) g(2); c) g(-1/2); d) g(1/2)

12.- Se dan dos conjuntos M = {6, 8, 25, 21} y N = {2, 5, 7} y la correspondencia **"es múltiplo de"**

a) Haz la representación sagital de la correspondencia.

b) Representa la función como pares ordenados.

c) ¿Es la correspondencia una función inyectiva?. Explica.

d) ¿Es una función sobreyectiva?. Explica.

e) ¿Es una función biyectiva?. Explica.

f) ¿Existe alguna función cuyo dominio sea N y cuyo rango sea M?. Explica tu respuesta.

13.- Sea la función g: R ⟶ R definida de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x \text{ si } x \geq 2 \\ x + 2 \text{ si } x < 2 \end{cases}$$

Hallar: a) g(3) b) g(1) c) g(-1) d) g(-2) e) g(5/2) f) g(- i/2)

14.- Sea la función h: R ⟶ R definida por $h(x) = \begin{cases} 3x - 6 \text{ si } x \leq 1 \\ 1 - x \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Hallar: a) h(0) b) h(-2) c) h(1) d) h(3)

3.-¿Una función constante puede ser inyectiva?. Explica tu razonamiento.

4.-¿Qué condición debe cumplirse para que una función constante sea sobreyectiva?.

5.- Se dan los conjuntos A = {m, n, s} y B = {3, 9}. a) Construye, usando representaciones sagitales, todas las funciones diferentes de A en B que pueden formarse. ¿Cuántas son?. b) ¿Es posible formar funciones sobreyectivas de B en A?. Explica.

6.- Dada la función f: $A \to B$ definida por $f(x) = x^2 - 1$ donde A = {-1, 1, 0, 2, -2} y B = {0, -1, -3}

a) Encontrar la imagen de cada elemento de A b) Representa la función con pares ordenados

Haz la representación sagital de la función. ¿Coincide el rango con el codominio de f?.

Establecer si la función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Explica las razones.

7.- Dado el conjunto A = {0, 1, -1, -2, 1/2} y la función definida por $f(x) = 2^x$, encontrar el conjunto de imágenes de elementos de A.

8.- Dado el conjunto H = {-1, 1/2, 0, 2 }. Sea la función f: $H \to R$ definida por $f(x) = x^2 - 1$.

a) Encontrar el conjunto de imágenes de f. b) Escribe el rango de f c) ¿Es inyectiva?. Explica.

9.-Dada la función f: $Q \to Q$ definida como $f(x) = 1 - |x|$

Hallar: a) f(1) b) f(-1) c) f(1/2) d) f(-1/2) e) ¿Por qué f no es inyectiva?

10.- Sea la función f: $R \to R$ definida por $f(x) = x^2 - 2x - 2$. Hallar:

a) f(-3) b) f(-4) c) $f(x^2)$ d) f(x+3) e) f(2) - f(-3) f) f(x + h) g) f(2x - 3) + f(x + 3)

h) f (x + h) - f(x) i) [f(x + h) - f(x)]/h j) f(f(x)

11.- Dada la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$. Hallar: a) g(0); b) g(2); c) g(-1/2); d) g(1/2)

12.- Se dan dos conjuntos M = {6, 8, 25, 21} y N = {2, 5, 7} y la correspondencia **"es múltiplo de"**

a) Haz la representación sagital de la correspondencia.

b) Representa la función como pares ordenados.

c) ¿Es la correspondencia una función inyectiva?. Explica.

d) ¿Es una función sobreyectiva?. Explica.

e) ¿Es una función biyectiva?. Explica.

f) ¿Existe alguna función cuyo dominio sea N y cuyo rango sea M?. Explica tu respuesta.

13.- Sea la función g: $R \to R$ definida de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x \text{ si } x \geq 2 \\ x + 2 \text{ si } x < 2 \end{cases}$$

Hallar: a) g(3) b) g(1) c) g(-1) d) g(-2) e) g(5/2) f) g(- i/2)

14.- Sea la función h: $R \to R$ definida por $h(x) = \begin{cases} 3x - 6 \text{ si } x \leq 1 \\ 1 - x \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Hallar: a) h(0) b) h(-2) c) h(1) d) h(3)

15.- Se da la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Encontrar a) $f(1+\sqrt{2})$ b) $f(2+h) - f(2)$ c) $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{\frac{1}{4}h}$

16.- Dada la función $h(x) = x + \dfrac{(x-2)^2}{4}$ encontrar: a) $h(2)$ b) $h(a+2)$ c) $h(a+b) - h(a)$

17.- Dada la función $g(y) = 3y^2 - y + 1$ demostrar que $g(2a+1) = 12a^2 + 10a - 3$

18.- Dada la función $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x^2-1)}$ encontrar $f(1/2)$

19.- Dada la función $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ determinar: **a)** $g(2x)$ **b)** $g(3x^2 - 6)$

c) $g(x+h)$ **d)** $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$

20.- Dada la función $f(x) = x^2 - x + 1$ demostrar que $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{3} = 2(x+1)$

21.- Dadas las funciones siguientes

$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ y $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t-1}}$ determinar : a) $f\left(\frac{1}{x}\right)$ b) $g(t-1)$ c) $g\left(\frac{a}{a+1}\right)$

22.- Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $3x^2 - 10x + 3 = 0$ b) $6x^2 + x - 1 = 0$ c) $x^2 + x - 272 = 0$ d) $x^2 - x - 6 = 0$

e) $x^2 - 3x - 10 = 0$ f) $x^2 - 24x + 80 = 0$ g) $x^2 - 7x + 6 = 0$ h) $x^2 - 10x + 24 = 0$

i) $x^2 - 3x - 18 = 0$ j) $6x^2 + x - 1 = 0$ k) $-6a^2 + 21x + 27 = 0$ ℓ) $(2a+3)(3a-1) = 2$

m) $\sqrt{m^2 + 4} = 3$ n) $\sqrt{5-a} = a+1$ o) $p^4 - 5p^2 = 24$ q) $10m^4 + 21m^2 = 10$

23.Resolver

a) $\sqrt[3]{6x+4} = 4$ b) $\sqrt{a+1} - 1 = 3a$ c) $\sqrt{3x-4} = \sqrt{-7x+3}$ d) $3 - \sqrt{t-3} = \sqrt{t}$ e) $\sqrt{2m+1} = \dfrac{2}{3}$

24.- En cada una de las siguientes expresiones despeja en cada caso la variable indicada en el paréntesis:

a) $y = \dfrac{6}{x+3}$ (x) **b)** $y = \sqrt{x+2}$ (x) **c)** $y = \dfrac{x-1}{2x-2}$ (x) **d)** $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ (x)

e) $y = x^5 + 5$ (x) **f)** $y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$ (x) **g)** $x = y^3 + 3$ (y) **h)** $x = 2\sqrt{y} - 7$ (y)

25.- Utiliza la propiedad de la raíz cuadrada para despejar la incógnita en cada ecuación

a) $(a-4)^2 = 20$ **b)** $(3p-4)^2 = 60$ **c)** $\left(k-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ **d)** $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2 = 4$

1.7 Estudio de los intervalos

Los intervalos son conjuntos de números reales que cumplen con determinada propiedad definida por desigualdades.
Los intervalos pueden ser **finitos** e **infinitos**

Los intervalos finitos son aquellos en los cuales sus extremos vienen representados por dos números reales cualesquiera, es decir, poseen longitud finita. Son intervalos finitos los siguientes:

Intervalo abierto de extremos a y b es el conjunto de todos los números reales que son mayores que a y menores que b.

$(a,b) = \{x \in R / \ a < x < b\}$

$(-1, 2) = \{x \in R / \ -1 < x < 2\}$

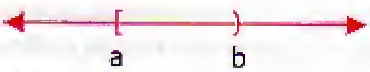
Intervalo cerrado de extremos a y b, a < b es el conjunto de todos los números reales que son mayores o iguales que a y menores o iguales que b.

$[a,b] = = \{x \in R / \ a \le x \le b\}$

$[-1, 2] = \{x \in R / \ -1 \le x \le 2\}$

- **Intervalo semiabierto por la derecha**

$[a, b) = \{x \in R / \ a \le x < b\}$



$-1, 2) = \{x \in R / \ -1 \le x < 2\}$

- **Intervalo semiabierto por la izquierda**

$(a, b] = \{x \in R / \ a < x \le b\}$

$(-1, 2] = \{x \in R / \ -1 < x \le 2\}$

Los intervalos infinitos son aquellos en los cuales uno de sus extremos tiene el símbolo ∞

$[a, \infty) = \{x \in R / \ x \ge a\}$

$[2, +\infty) = \{x \in R / \ x \ge 2\}$

$(a, \infty) = \{x \in R / \ x > a\}$

$(2, +\infty) = \{x \in R / \ x > 2\}$

$(-\infty, a] = \{x \in R / \ x \le a\}$

$(-\infty, 2] = \{x \in R / \ x \le 2\}$

$(-\infty, a) = \{x \in R / \ x < a\}$

$(-\infty, 2) = \{x \in R / \ x < 2\}$

Los números reales, generalmente con frecuencia, se expresan con dos extremos infinitos mediante la siguiente notación de intervalo: $\mathbf{R = (-\infty, +\infty)}$

__Nota__: debe tenerse claro que $+\infty$ y $-\infty$ no son números reales, son simplemente símbolos que utilizaremos para indicar un valor mayor o menor que cualquier número real.

Observa, que en la representación gráfica de los intervalos hemos utilizado el símbolo [ ] para indicar que el intervalo contiene los extremos. y el símbolo ( ) para indicar que el intervalo no contiene los extremos.

1.8 *Unión e intersección de conjuntos*

La unión de dos conjuntos A y B, que se escribe $A \cup B$, es el conjunto de elementos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B.

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 5, 6, 7\}$ $\longrightarrow$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Si $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{x, y, z\}$ $\longrightarrow$ $A \cup B = \{a, b, c, d, e, x, y, z\}$

La intersección de dos conjuntos A y B, que se escribe $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que son comunes a los conjuntos A y B.

Si $A = \{1, 2, 4, 5\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ $\longrightarrow$ $A \cap B = \{3, 4, 5\}$

Si $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{b, c, m, n\}$ $\longrightarrow$ $A \cap B = \{B, C\}$

Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{m, n, s\}$ $\longrightarrow$ $A \cap B = \{\ \} = \phi$

Como puede notarse en el último ejemplo no existen elementos comunes, por lo que el resultado es el conjunto vacío, el cual puede notarse de dos formas distintas: $\{\ \}$ o ϕ

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

Determinar $A \cup B$ y $A \cap B$ para cada par de conjuntos A y B

a) $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{2, 3, 4\}$ **b)** $A = \{-2, -4, -5\}$ $B = \{-1, -2, -4, -6\}$

c) $A = \{\ \}$ $B = \{0, 1, 3\}$ **d)** $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ $B = \{1, 3, 5, 7\}$

e) $A = \{-1, 0, 1\}$ $B = \{0, 2, 4, 6\}$ **f)** $A = \{0, 4, 6, 8, 10\}$ $B = \{1, 4, 8\}$

Respuestas

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ $A \cap B = \{2, 3\}$ b) $A \cup B = \{-1, -2, -4, -5, -6\}$ $A \cap B = \{-2, -4\}$

c) $A \cup B = \{o, 1, 3\}$ $A \cap B = \{\ \}$ d) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $A \cap B = \{\ \}$

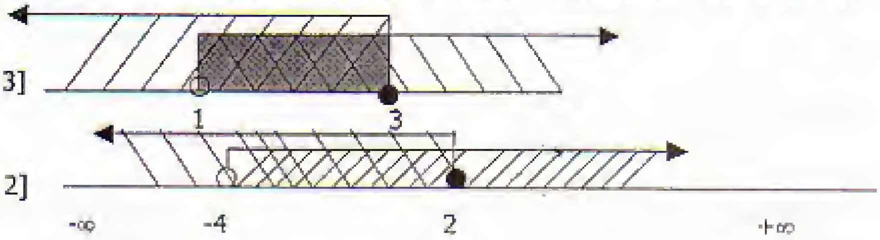
e) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 4, 6\}$ $A \cap B = \{0\}$ f) $A \cup B = \{0, 1, 4, 6, 8, 10\}$ $A \cap B = \{4, 8\}$

1.9 Unión e intersección de intervalos

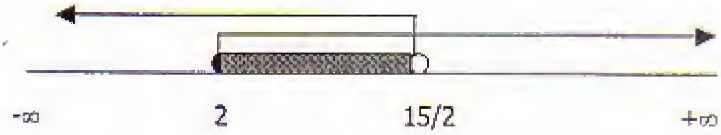
Como los intervalos son conjuntos numéricos es posible realizar operaciones de unión e intersección de intervalos.

1. $(-\infty, 3] \cap (1, +\infty) = (1, 3]$

2. $(-4, +\infty) \cap (-\infty, 2] = (-4, 2]$

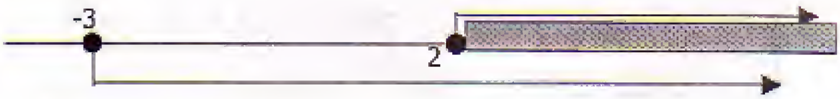


3. $[2, +\infty) \cap (-\infty, \frac{15}{2}) = [2, \frac{15}{2})$

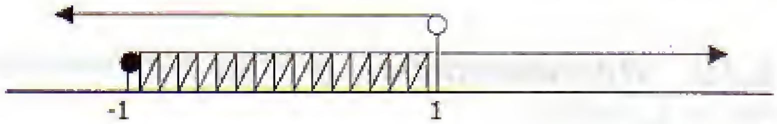


4. $(-\infty, -4] \cup (2, +\infty)$

5. $[-3, +\infty) \cap [2, +\infty) = [2, +\infty)$



6. $(-\infty, 1) \cap [-1, +\infty) = [-1, 1)$



ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.- Representa sobre la recta real cada uno de los siguientes intervalos

a) $A = [-2, 0)$ b) $B = (-1, +\infty)$ c) $C = [3, 0)$ d) $D = [1, +\infty)$ e) $E = (-2, +\infty)$

f) $F = (1/2, +\infty)$ g) $G = (-\infty, 1]$ h) $H = (-\infty, 3)$ i) $I = (-2, 3)$ j) $J = [-3, 2]$

2.- Expresa en notación de conjunto cada uno de los intervalos anteriores.

3.- Se dan los siguientes conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{2, 3, 4\}$ $C = \{a, b, c\}$ $D = \{\ \}$

$E = \{b\}$ $F = \{x \in N / 2 \leq x \leq 5\}$ hallar:

a) $A \cap B$ **b)** $A \cup B$ **c)** $B \cap C$ **d)** $D \cap A$ **e)** $C \cap E$ **f)** $F \cap B$ **g)** $F \cup A$ **h)** $F \cup A$ **i)** $E \cap D$

4.- Se dan los siguientes intervalos $A = (-\infty, 3]$ $B = [4, +\infty)$ $P = [-4, +\infty)$ $Q = [2, +\infty)$

$M = (-\infty, 3)$ $N = (1, +\infty)$ $L = (-\infty, -1)$ $S = (-\infty, -2]$ $C = [-2, 2]$ $D = [-1, -2]$

$E = [2, 4)$ $F = (3, 8)$ $G = [-3, 1)$ $H = [-1, 2]$ $I = [-4, 2)$ $K = (-1, 6)$

Hallar: **a)** $A \cap B$ **b)** $A \cup B$ **c)** $P \cap Q$ **d)** $M \cap N$ **e)** $L \cap S$
f) $C \cap D$ **g)** $E \cap F$ **h)** $G \cap H$ **i)** $I \cap K$

5.- Expresa en forma de conjunto y en forma de intervalo la solución de cada una de las inecuaciones y representa sobre la recta real el intervalo de solución.

a) $x - 1 \geq 0$ b) $x + 2 > 0$ c) $3x - 1 \geq 0$ d) $\dfrac{x}{x-2} \geq 0$ e) $2 - x \geq 0$ f) $1 - x \geq 0$

g) $\dfrac{x}{x+3} \geq 0$ h) $1 - x^2 \geq 0$ i) $x^2 - 9 \geq 0$ j) $1 + \dfrac{x}{2} \geq 0$

Observación: para la resolución de los ejercicios h) e i) deben tenerse presente las siguientes propiedades:

$\sqrt{x^2} = |x|$ $\qquad |x| \leq a \Rightarrow x \leq a$ o $x \geq -a$ $\qquad |x| \geq a \Rightarrow x \geq a$ o $x \leq -a$

1.10 Representación gráfica de funciones. Dominio y rango de la función.

Iniciemos el estudio de la representación gráfica de funciones con **un conjunto de actividades.**
Representar gráficamente los puntos en el plano usando papel cuadriculado o milimetrado.

A(-2, 1)	B(0, -2)	C(-3, -1)	D(-1, 3)	E(-3, 0)	F(1, 1)	G(0, 2)
H(0, -4)	I(-1, 1)	J(5, 2)	K(-1, -2)	L(-2, 0)	M(-3, -5)	N(0, -7)
O(-3, -4)	P(-4, -2)	R(2, -4)	S(1/2, -3)	T(5, -2)	U(0, 6)	V(-1, 5)
W(3/2, 3)	X(7, -19)	Y(-4, -4)	Z($\sqrt{3}$, 4)			

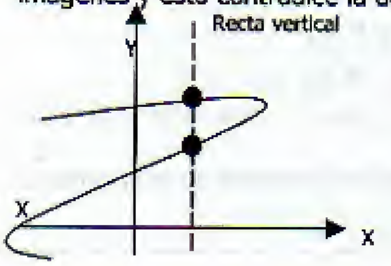
Criterios de la recta vertical y horizontal

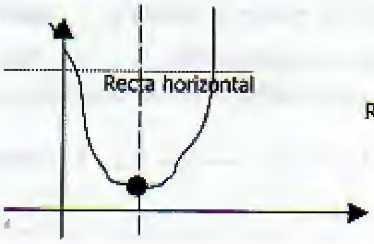
- **Criterio de la recta vertical**

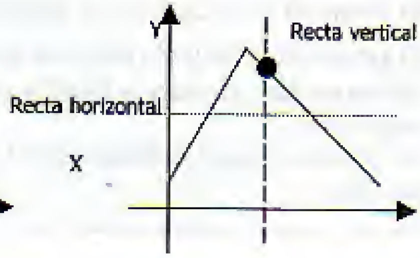
No toda curva en el plano representa el gráfico de un función. Con el objeto de reconocer las curvas que corresponden a gráficos de funciones se parte del siguiente criterio geométrico.

Una curva en el plano representa el gráfico de una función si y sólo si toda recta vertical corta a la curva como máximo en un punto.

Es indudable que la veracidad de este criterio se fundamenta en el hecho de que si una recta vertical es capaz de cortar a la curva dos veces, entonces el punto de la abscisa tendría dos imágenes y esto contradice la definición de función.







No representa función
La recta vertical corta a la gráfica en más de un punto

Representa una función.
No es inyectiva.
La recta horizontal corta a la gráfica en más de un punto

Representa una función.
No es inyectiva. La recta horizontal corta a la gráfica en dos puntos.

- **Criterio de la recta horizontal**

El criterio de la recta horizontal nos permite deducir en qué momento una función es inyectiva. Para ello bastará conocer el siguiente criterio:

Toda recta paralela al eje horizontal que corte a la gráfica a lo más en un punto garantiza la inyectividad de la función.

Representación gráfica de la función afín

Una función afín es una función cuya gráfica es una línea recta que no pasa por el origen. Esta función es de la forma $y = mx + b$, donde m representa la pendiente de la recta y b representa el punto donde la recta corta al eje de ordenadas.

Para graficar una función afín debemos despejar y en la ecuación para luego sustituir valores de x, encontrando los correspondientes valores de y.

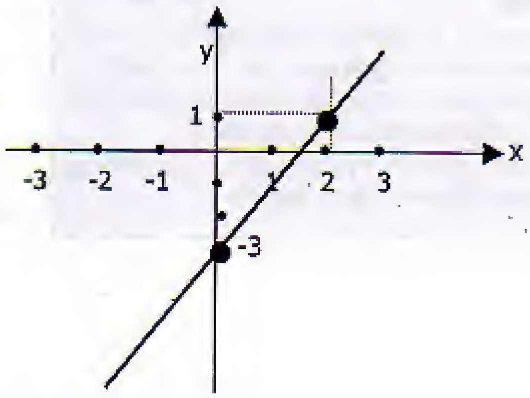
Ejemplos

Graficar la función $f(x) = 2x - 3$ y hallar el dominio y el rango.

Si hacemos $f(x) = y$ nos queda que $y = 2x - 3$. Partiendo de aquí construimos una tabla de valores sustituyendo los valores de x para ir determinando los correspondientes valores de y

$Y = f(x) = 2x - 3$

$x = 0 \to y = f(0) = 2.0 - 3 = 0 - 3 = -3$
$x = 2 \to y = f(2) = 2.2 - 3 = 4 - 3 = 1$
$x = -1 \to y = f(-1) = 2.(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$



Tabla

y	y
0	-3
2	1
-1	-5

Características de la gráfica

La gráfica obtenida es una línea recta.
El dominio es el conjunto de todos los números reales R. Dom f = R = ($-\infty$, $+\infty$)
El rango es el conjunto de todos los números reales R Rgo f = R = ($-\infty$, $+\infty$)
Observación: cuando la función está definida en un intervalo, la gráfica es una semi-recta o un segmento.
En el caso de estar definida como f: [0, 2] $\longrightarrow$ [-3 , 1] estamos en presencia de un segmento de recta.

Cómo determinar las intersecciones con los ejes

Para determinar la intersección con el eje x se hace y = 0
Para determinar la intersección con el eje y se hace x = 0

Ejemplo: consideremos la expresión siguiente: 3y = 6x + 12

Determinemos la intersección con el eje y (punto donde la gráfica corta al eje de las ordenadas), haciendo x = 0 y despejando la variable y

$$\begin{aligned} 3y &= 6x + 12 \\ 3y &= 6.0 + 12 \\ 3y &= 0 + 12 \\ 3y &= 12 \\ y &= 12/3 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

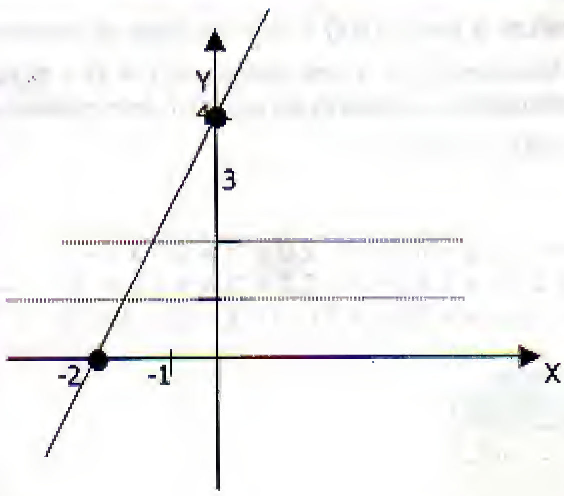
La gráfica debe cortar al eje de las ordenadas en y = 4. El par ordenado que está representando la intersección con el eje y es (0 , 4)

Determinemos la intersección con el eje x (punto donde la gráfica corta al eje de las abscisas). Hagamos y = 0 y despejemos la variable x

$$\begin{aligned} 3y &= 6x + 12 \\ 3.0 &= 6x +12 \\ 0 &= 6x + 12 \\ -12x &= 6x \\ x &= -2 \end{aligned}$$

La gráfica debe cortar el eje de las abscisas en x = -2. El que está representando la intersección con el eje x es el (-2, 0).

Al localizar la intersección y trazar la gráfica se observa la figura de la derecha, la cual es una recta.
Esta función es *inyectiva*, ya que toda recta horizontal corta la gráfica en un solo punto.
La función lineal es *sobreyectiva* porque toda recta horizontal corta a la gráfica.
La función afín es inyectiva y sobreyectiva y como consecuencia será *biyectiva*



La función lineal o de proporcionalidad directa, es una función de la forma **y = mx**, donde m representa la constante de proporcionalidad.

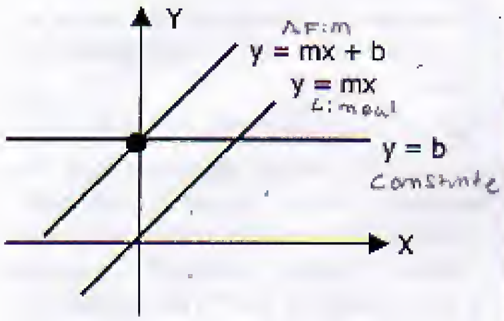
La gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas y su pendiente es la constante de proporcionalidad m.

Si **m > 0** la recta pasa por el primer y tercer cuadrante y la función es creciente.

Si **m < 0** la recta pasa por el segundo y cuarto cuadrante y la función es decreciente.

Si **m = 1** la gráfica es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Si **m = -1** es la bisectriz del primero y cuarto cuadrante.



Una función afín se escribe y = mx + b

Una función lineal se escribe y = mx

Una función constante se escribe y = b. Su gráfica es una recta paralela al eje de las X trazada por el punto (0 , b) siendo el valor b la ordenada en el origen.
La función constante no es inyectiva, ya que si se toman dos valores distintos del dominio tienen la misma imagen.

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.- Haz la gráfica de cada una de las siguientes funciones, indicando si son lineales, afines o constantes.

a) $y = 2x + 3$	b) $y = 2x$	c) $y = -2$	d) $y = \frac{1}{2}x + 3$
e) $y = -2x + 1$	f) $y = \frac{1}{2}x$	g) $3y + 2x = 10$	h) $2x - 3y = 6$
i) $y = 6$	j) $y = -3 - 2x$	k) $y = 2$	ℓ) $y = -x + 1$

Representación gráfica de la función valor absoluto

Analicemos ahora una **función no lineal,** es decir, una función cuya gráfica no es una recta.

Una de las funciones no lineales lo constituye **la función valor absoluto** $f(x) = |x|$

Para graficar la función **valor absoluto** debemos recordar la definición dada así:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

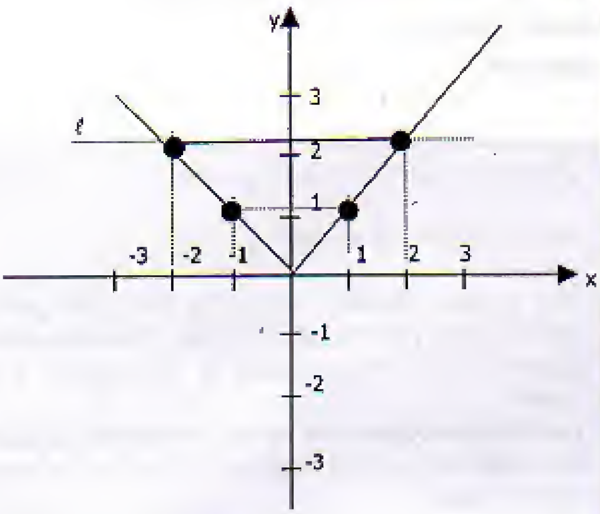
Esta definición nos indica que la gráfica de la función valor absoluto debe construirse partiendo de las gráficas de las funciones lineales.

$$f(x) = x \text{ si } x \geq 0 \text{ y } f(x) = -x \text{ si } x < 0$$

Para construir la tabla debemos seleccionar valores de x menores que cero y valores de x mayores que cero.

Tabla

X	-2	-1	0	1	2
Y	2	1	0	1	2



El dominio es el conjunto de todos los números reales.

Dom f = R = ($-\infty$, + ∞)

El rango es el conjunto de todos los números reales desde cero hasta más infinito

Rgo f = [0 , + ∞) = {y / y $\geq$ 0 }

La función valor absoluto **no es inyectiva**, ya que un par de elementos distintos del dominio tienen la misma imagen. Una recta horizontal, *ℓ*, paralela al eje x corta a la gráfica en dos puntos.

No es **sobreyectiva** porque los números reales que son negativos no están en el rango de la función.

Observaciones

Como hemos observado, la función no es biyectiva.

Es posible hacer restricciones en el dominio de la función para lograr que ella sea biyectiva.

La función la hacemos biyectiva si restringimos el dominio de la manera siguiente:

Dom f = [0 , + ∞) o también Dom f = ($-\infty$, 0]

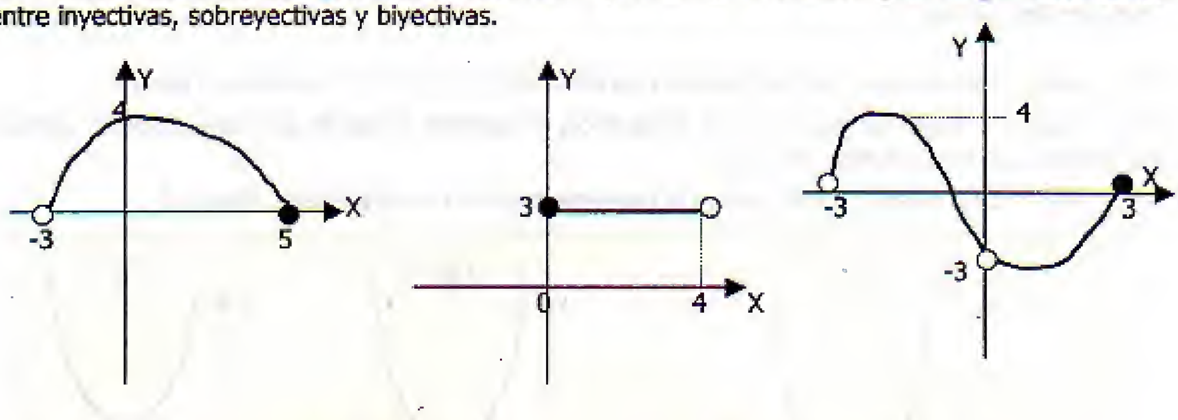
ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.- Para cada una de las funciones dadas a continuación: **a**) construir la gráfica de la función **b**) hallar el dominio y el rango **c**) establecer el intervalo en el dominio que hace que dicha función sea biyectiva.

a) $f(x) = |x| - 2$ b) $f(x) = -|x| + 1$ c) $f(x) = -|x| + 1$ d) $f(x) = |x - 1| + 2$

e) $f(x) = -|x - 2|$ f) $f(x) = |x + 1|$ g) $f(x) = -|3x - 4|$ h) $f(x) = |x + 4|$

2.- A continuación se dan gráficas de funciones. Determinar el dominio y el rango. Clasificarlas entre inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.



Representación gráfica de la función parte entera.

La función **parte entera** o **máximo entero** se denota como f(x) = [x] e indica el máximo entero menor o igual que x.

$f(x) = n$ para $n \leq x < n + 1$

$f(x) = [-3] \Rightarrow -3 \leq x < -2$

$f(x) = [-2] \Rightarrow -2 \leq x < -1$

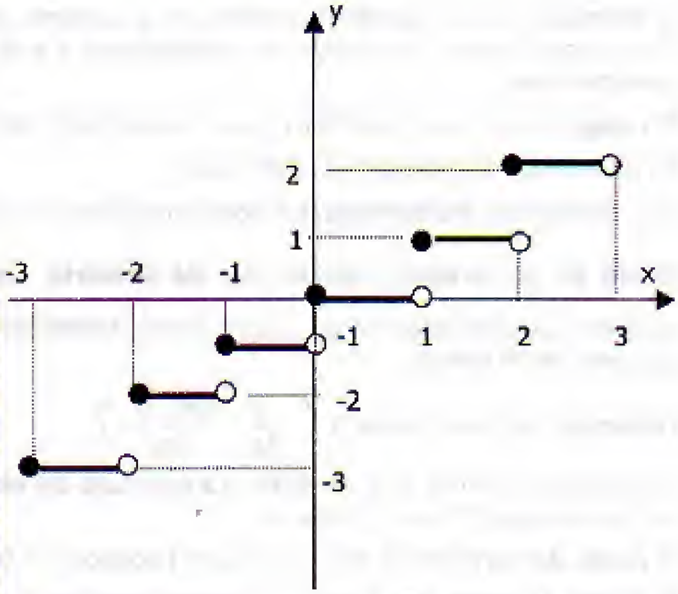
$f(x) = [-1] \Rightarrow -1 \leq x < 0$

$f(x) = [0] \Rightarrow 0 \leq x < 1$

$f(x) = [1] \Rightarrow 1 \leq x < 2$

$f(x) = [-5] \Rightarrow -5 \leq x < -4$

$f(x) = [-4] \Rightarrow -4 \leq x < -3$



Nótese que la gráfica está constituida por un conjunto de segmentos de recta. En cada uno de los segmentos de recta está incluido el punto extremo de la izquierda, excluyéndose, el de la derecha.

Dom f = R Rgo f = Z

Al sustituir a x por cualquier número real, f(x) es un entero.

Representación gráfica de la función cuadrática

Una **función cuadrática** es una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b y c números reales y $a \neq 0$.

Son funciones cuadráticas las siguientes:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ c) $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

d) $f(x) = 2x^2 + 7x + 3$ e) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$ f) $f(x) = 2x^2 - 82x + 720$

La representación gráfica de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ es una **parábola**, en la cual suelen presentarse los siguientes casos:

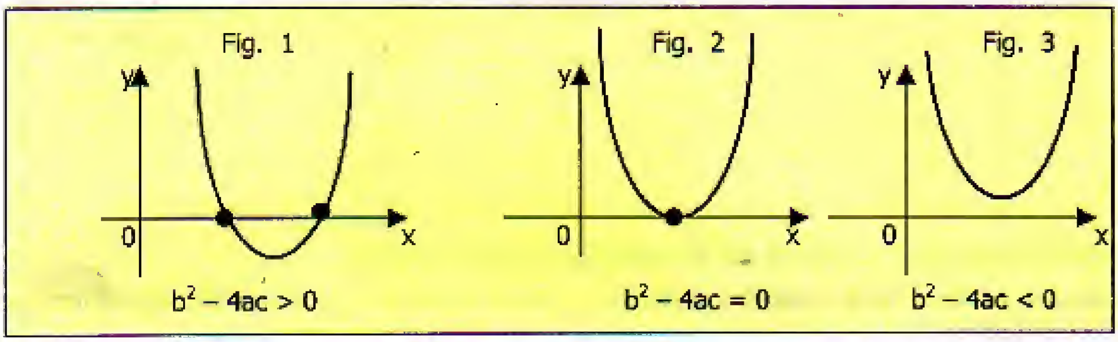
Si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba y el vértice es **un mínimo**
Si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo y el vértice es **un máximo**

El signo del discriminante de la ecuación de segundo grado $\Delta = b^2 - 4ac$ determina los puntos de corte con los ejes así:

Si $b^2 - 4ac > 0$ existen dos puntos donde la parábola corta al eje de las abscisas. Figura 1

Si $b^2 - 4ac = 0$ existe un punto donde la parábola es secante al eje de abscisas, es decir, corta al eje de abscisas en un punto. Figura 2

Si $b^2 - 4ac < 0$ no existen puntos donde la parábola corte al eje de abscisas. Figura 3



El dominio de una función cuadrática es el conjunto de los números reales R. Esto se explica porque todo número real puede ser sustituido por x y el valor correspondiente de y será también un número real.

El rango de la función cuadrática será un subconjunto de los números reales.

No es inyectiva ni sobreyectiva. ¿ por qué ?.

Para representar gráficamente la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ debemos encontrar:

El eje de la parábola, llamado **eje de simetría**, es la recta de ecuación $x = \frac{-b}{2a}$. Toda parábola que abre hacia arriba o hacia abajo, tendrá un eje de simetría que es una recta vertical que pasa por el vértice.

El vértice, que es el punto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

La abscisa del vértice es $x = -b/2a$. La ordenada del vértice la encontramos sustituyendo el valor de x en la expresión $y = x^2 + bx + c$.

El punto de corte con el eje y se obtiene haciendo $x = 0$

El punto de corte con el eje x se obtiene haciendo $y = 0$ y resolviendo la ecuación de segundo grado.

a = 1
b = -4
c = 3

Ejemplo

Representar gráficamente la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y hallar el dominio.

Como **a = 1 > 0** entonces la parábola abre hacia arriba, indicándonos que tiene un extremo mínimo.

El eje de la parábola viene dado por la recta de ecuación $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2.1} = \frac{4}{2} = 2$

Determinemos el vértice $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = V\left(2, \frac{-16 + 4.1.3}{4.1}\right) = V(2, -1)$

También puede encontrarse la ordenada del vértice sustituyendo el valor de $x = 2$ en la expresión siguiente $y = x^2 - 4x + 3$

$y = 4 - 8 + 3 \Longrightarrow \mathbf{y = -1}$

Los puntos de corte con el eje y

Hacemos $x = 0$ en $y = x^2 - 4x + 3$, quedándonos que $y = 3$

Para encontrar los puntos de corte con el eje x debemos evaluar $b^2 - 4ac$

$b^2 - 4ac = 16 - 4.1.3 = 16 - 12 = 4 > 0$

$b^2 - 4ac > 0$. Esto nos indica que la parábola corta al eje x en dos puntos

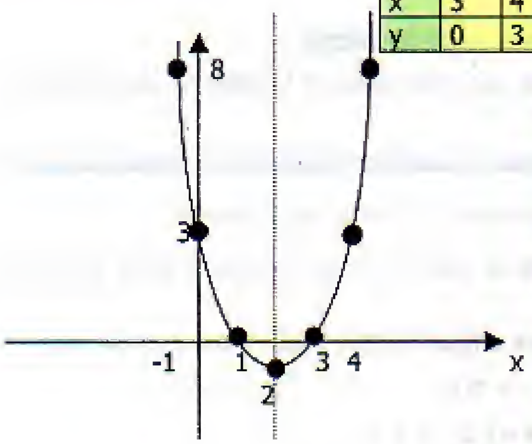
Hagamos $y = 0$ en $y = x^2 - 4x + 3$, quedándonos que $x^2 - 4x + 3 = 0$

Resolviendo la ecuación por factorización se tiene que

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow (x - 3)(x - 1) = 0 \Longrightarrow$ $x = 3$ o $x = 1$

Construyamos una tabla de valores, dándole valores de x a la derecha y a la izquierda de $x = 2$

x	3	4	5	1	0	-1
y	0	3	8	0	3	8



Al observar la gráfica que es una parábola podemos darnos cuenta de lo siguiente:

Dom f = R

Rgo f = [-1 , ∞]

La función **no es inyectiva** porque toda recta horizontal corta a la gráfica en dos puntos.

Para hacerla inyectiva es necesario restringir el dominio en el intervalo [2 , +∞) o en el intervalo (-∞ , 2].

Es sobreyectiva cuando está definida en el rango [-1 , +∞)

Observaciones

Al graficar las funciones cuadráticas se deben tener presente los aspectos siguientes:

1.- Ver hacia donde abre la parábola de acuerdo al signo de a (coeficiente de la variable x^2)

2.- La determinación del eje de simetría (eje de la parábola).

3.- Las coordenadas del vértice.

4.- El punto de corte con el eje y.

5.- La utilización del eje de simetría, como guía para seleccionar los valores de x, tanto a la izquierda como a la derecha del eje.

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.- Hallar el número de puntos de corte con el eje x que tienen las siguientes parábolas:

a) $y = 2x^2 - x + 3$ **b)** $x^2 - 2x + 1$ **c)** $y = 3x^2 - 7x - 3$ **d)** $x^2 + x + 1$

2.- En cada una de las funciones cuadráticas dadas: a) encontrar el eje de simetría b) encontrar el punto de corte con el eje y c) obtener el vértice d) encontrar los puntos de corte con el eje x e) construir la gráfica de la función e) partiendo de la gráfica determinar el dominio y el rango.

a) $y = x^2$ **b)** $y = -x^2$ **c)** $y = 25 - x^2$ **d)** $y = -x^2 + 2x + 3$ **e)** $y = 3x^2 - 6x + 2$

f) $y = -2x^2 - 9x$ **g)** $y = x^2 - 4$ **h)** $y = -x^2 + 6x - 9$ **i)** $y = x^2 - 4x + 5$ **j)** $y = 4x^2 + 4x + 1$

k) $y = -x^2 + 4$ **ℓ)** $y = x^2 - 3$ **m)** $y = -x^2 + 6x - 7$ **n)** $y = -2x^2 + 6x - 4$

3.- Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y = x^2 + ax + a$ y pasa por el punto (1,9). Calcula el valor de a. **R:** $a = 4$

4.- Una función cuadrática de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1 , 1), (0 , 0), (-1 , 1). Calcular los valores de a, b y c. **R:** $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$

Determinación del dominio de expresiones algebraicas.

Nuestra función consiste en determinar aquellos valores para los cuales la función no está definida, con el objeto de excluirla del dominio.

Ejemplo 1 Dada la función $y = \sqrt{x-1}$ hallar el dominio y el rango de la función.

La raíz cuadrada de un número real existe únicamente si éste es mayor o igual a cero, es decir, cuando la cantidad subradical es no negativa.

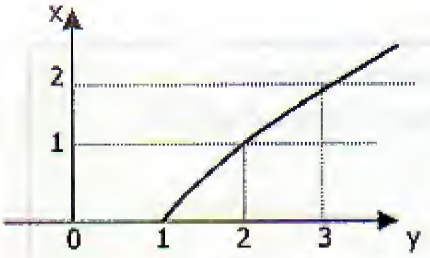
De acuerdo a esto la cantidad subradical debe ser mayor o igual a cero, pudiéndose escribir así:

$$x - 1 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 1 \Longrightarrow \text{Dom } f = [\,1\,,+\infty\,]$$

Como $\sqrt{x-1} \geq 0$ para todo $x \in$ Dom f, entonces Rgo f = $[\,0\,,+\infty\,]$

Determinemos la gráfica de $y = f(x) = \sqrt{x-1}$

X	1	2	5	10	17
Y	0	1	2	3	4



Dom f = $[\,1\,,+\infty\,]$

Rgo f = $[\,0\,,+\infty\,]$

f: $[\,1\,,+\infty\,] \longrightarrow [\,0\,,+\infty\,]$

La función definida de esta manera es **inyectiva**, ya que toda recta horizontal paralela al eje x corta a la gráfica de la función en un solo punto.

Es **sobreyectiva**, porque todo elemento del rango es imagen.

Como consecuencia de las dos condiciones anteriores decimos que la función es biyectiva.

Ejemplo 2

Dada la función $g(x) = \dfrac{x+1}{3x-6}$ hallar dominio de g.

Para hallar el Dom g, deben ser descartados todos los números x que anulen el denominador.

$3x - 6 = 0 \Longrightarrow 3x = 6 \Longrightarrow x = \dfrac{6}{3} \Longrightarrow x = 2$

Luego el dominio de g está constituido por todos los reales excepto el 2.

$$\text{Dom } g = R - \{ 2 \} = (-\infty , 2) \cup (2 , +\infty)$$

Ejemplo 3

Dada la función $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x+2} - 3}$. Hallar el dominio de f.

Por un lado debemos descartar los valores que anulan el denominador, para lo cual hacemos esa expresión igual a cero $\sqrt{x+2} - 3 = 0$

$\sqrt{x+2} - 3 = 0 \Longrightarrow \sqrt{x+2} = 3 \Longrightarrow x+2 = 9 \Longrightarrow x = 7$

Por otro lado debe cumplirse también que $x + 2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -2 \Longrightarrow x \in [-2 , +\infty]$

Luego el Dom f = $[-2 , +\infty] - \{ 7 \}$

Ejemplo 4

Dada la función $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, determinar el dominio de la función.

Debe cumplirse que $4 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow 4 \geq x^2 \Longrightarrow x^2 \leq 4$

$\Longrightarrow |x| \leq 2$ (porque $|x| = x$)

$\Longrightarrow -2 \leq x \leq 2$ ($|x| \leq a \longrightarrow -a \leq x \leq a$)

Luego $x \in [-2 , 2]$ de donde se deduce que Dom g = $[-2 , 2]$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.- Calcular el dominio de las siguientes funciones:

a) $I(x) = \sqrt{x-9}$ **R:** [9, +∞]

b) $t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}-2}$ **R:** (- ∞ , -2] U [2, +∞]

c) $h(x) = \dfrac{3}{\sqrt{9-x}-2}$ **R:** (- ∞, 9] – { 5 }

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-5}}{x-2}$ **R:** [5/3, 2) U(2, +∞)

e) $f(x) = \sqrt{2x-6}$ **R:**[3, +∞)

f) $h(x) = -\sqrt{4-x}-3$ **R:** (-∞, 4]

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+5$ **R:** (-∞, 2)

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ **R:** (-∞ , -1)U [1, +∞)

i) $g(x) = \sqrt{16-x^2}$ **R:** [-4, 4]

j) $f(x) = \sqrt{(x+1)(3-x)}$ **R:** [-1, 3]

k) $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ **R:** R – { -1 }

ℓ) $g(x) = \sqrt{2x-1}$ **R:** $[\frac{1}{2}, +\infty)$

m) $g(x) = \sqrt{x+2}-3$ **R:**[-2, +∞)

n) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ **R:** R – { 1 }

o) $\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{x-2}$ **R:** [2 , +∞)

p) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{4-x^2}$ **R:** (1 , 2](-∞ , 1)U (1 , +∞)

Representación gráfica de la función raíz cuadrada

Una función radical o función raíz cuadrada es una función que contiene raíces de variables.
Los ejemplos siguientes representan funciones radicales:

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad f(x) = -\sqrt{x-3} \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x-3} \qquad h(x) = \frac{(x-4)^{\frac{1}{6}}}{3} \qquad g(x) = \sqrt{2-x}$$

En nuestro caso particular las expresiones debajo del signo radical deben ser lineales.

Ejemplo

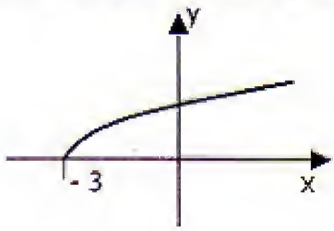
Consideremos la función definida como $f(x) = \sqrt{x+3}$

a) ¿Cuál es el dominio?. b) Graficar la función c) Determinar el rango.

Solución

El dominio lo determinamos encontrando los valores que hacen la cantidad subradical mayor o igual a cero.

$X + 3 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -3 \Longrightarrow$ Dom f = [-3 , +∞)



La gráfica de la función se muestra a la derecha.
Como puede observarse en la gráfica, el rango es el conjunto [0 , +∞).

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.- Calcular el dominio de las siguientes funciones:

a) $I(x) = \sqrt{x-9}$ **R:** [9, +∞]

b) $t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}-2}$ **R:** (- ∞ , -2] U [2, +∞]

c) $h(x) = \dfrac{3}{\sqrt{9-x}-2}$ **R:** (- ∞, 9] – { 5 }

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-5}}{x-2}$ **R:** [5/3, 2) U(2, +∞)

e) $f(x) = \sqrt{2x-6}$ **R:**[3, +∞)

f) $h(x) = -\sqrt{4-x}-3$ **R:** (-∞, 4]

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+5$ **R:** (-∞, 2)

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ **R:** (-∞ , -1)U [1, +∞)

i) $g(x) = \sqrt{16-x^2}$ **R:** [-4, 4]

j) $f(x) = \sqrt{(x+1)(3-x)}$ **R:** [-1, 3]

k) $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ **R:** R – { -1 }

ℓ) $g(x) = \sqrt{2x-1}$ **R:** $[\frac{1}{2}, +\infty)$

m) $g(x) = \sqrt{x+2}-3$ **R:**[-2, +∞)

n) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ **R:** R – { 1 }

o) $\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{x-2}$ **R:** [2 , +∞)

p) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{4-x^2}$ **R:** (1 , 2](-∞ , 1)U (1 , +∞)

Representación gráfica de la función raíz cuadrada

Una función radical o función raíz cuadrada es una función que contiene raíces de variables.

Los ejemplos siguientes representan funciones radicales:

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad f(x) = -\sqrt{x-3} \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x-3} \qquad h(x) = \frac{(x-4)^{\frac{1}{6}}}{3} \qquad g(x) = \sqrt{2-x}$$

En nuestro caso particular las expresiones debajo del signo radical deben ser lineales.

Ejemplo

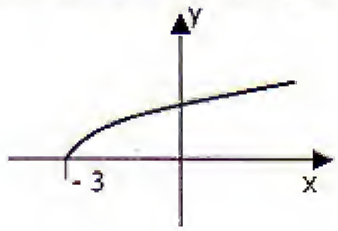
Consideremos la función definida como $f(x) = \sqrt{x+3}$

a) ¿Cuál es el dominio?. b) Graficar la función c) Determinar el rango.

Solución

El dominio lo determinamos encontrando los valores que hacen la cantidad subradical mayor o igual a cero.

$X + 3 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -3 \Longrightarrow$ Dom f = [-3 , +∞)



La gráfica de la función se muestra a la derecha.
Como puede observarse en la gráfica, el rango es el conjunto [0 , +∞).

Funciones definidas a trazos o en intervalos

Las funciones definidas en intervalos o a trazos son aquellas en las cuales la obtención de las imágenes varían de acuerdo al intervalo del eje x que se esté utilizando. Ellas se caracterizan porque contienen varias expresiones algebraicas. La expresión analítica no es única, sino que depende del valor de la variable independiente..

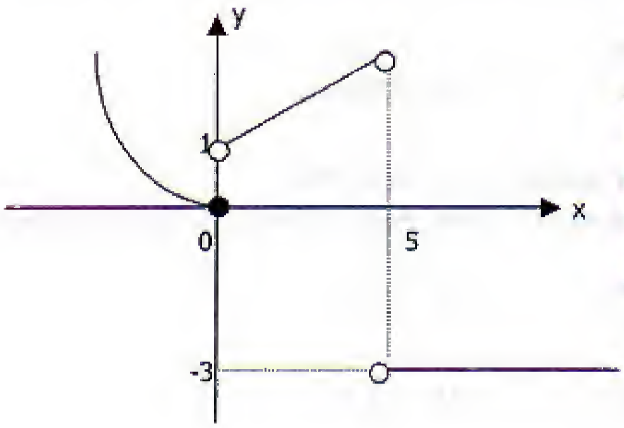
Para determinar su dominio es preciso unir los diferentes subconjuntos para los cuales está definida.

Ejemplo 1

Sea la función definida así: $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \leq 0 \\ x + 1 \text{ si } 0 < x < 5 \\ -3 \text{ si } 5 \leq x \end{cases}$

De acuerdo a la expresión dada notamos que la función posee tres tramos y entre los tres cubren completamente el conjunto de los números reales. Esto nos indica que su **dominio** es el conjunto de los números reales R = $(-\infty, +\infty)$

Dom f = R Rgo f = $[0, +\infty) \cup \{-3\}$



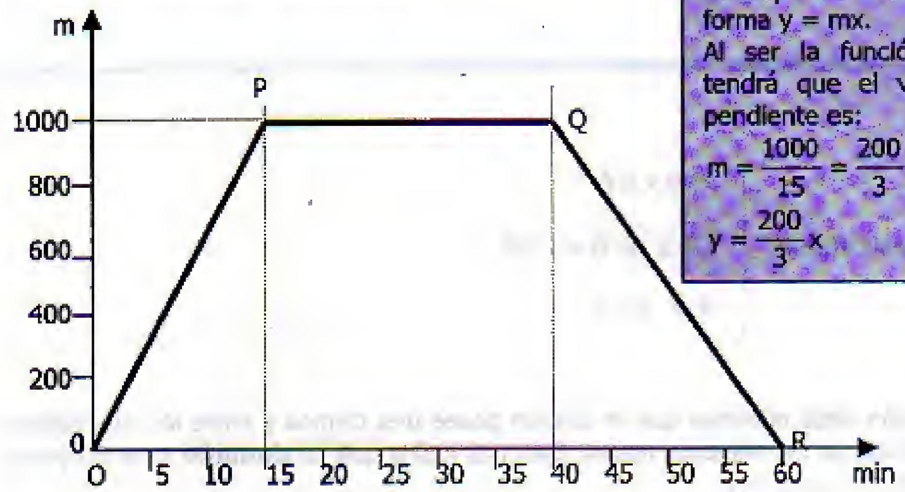
La gráfica contiene una semi-parábola entre $-\infty$ y cero
Luego tiene una recta entre 0 y 5 .
Finalmente una recta entre 5 y $+\infty$

Ejemplo 2

Dos puntos O y P están separados una distancia de 1 Km. (1000 m). El móvil sale desde O y se dirige hacia P y tarda 15 minutos en llegar a él, permaneciendo en éste 25 minutos y finalmente empleando 20 minutos en regresar.

En la gráfica mostrada puede observarse la distancia desde el punto A al punto B y luego su regreso al punto de partida en función del tiempo transcurrido.

Encontrar la expresión algebraica.



La recta que une los puntos O y P corresponde a una función lineal de la forma y = mx.
Al ser la función 1000 = m.15 se tendrá que el valor calculado en la pendiente es:
$m = \frac{1000}{15} = \frac{200}{3}$, luego la función es
$y = \frac{200}{3}x$

La recta que une los puntos P y q corresponde a una función constante, que tiene por ecuación la expresión y = 1000.
La recta que une los puntos Q y R es la gráfica de una función afín del tipo y = mx + b. Al lograr que las coordenadas de los puntos citados cumplan la expresión de función se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 1000 = m.40 + b \\ 0 = m.60 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1000 = m\,.\,40 + b \\ 1000 = -\,m.\,20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -50 \\ b = 3000 \end{cases}$$

La función que une los puntos Q y R tiene por ecuación y = -50x + 3000

La expresión que describe el movimiento del móvil A hasta regresar viene dada por la expresión siguiente:

$$Y = \begin{cases} \frac{200}{3}x & \text{si } 0 \le x < 15 \\ 1000 & \text{si } 15 \le x < 40 \\ -50x + 3000 & \text{si } 40 \le x \le 60 \end{cases}$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

En cada uno de los ejercicios trazar la gráfica de la función y determinar su dominio y rango.

a) $f(x)=\begin{cases} 3x-6 & \text{si } x \le 1 \\ 1-x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -x & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ c) $g(x)=\begin{cases} -3 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ -2x & \text{si } 4 < x \le 6 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x+1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ e) $g(x)=\begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < -3 \\ 2 & \text{si } -3 \le x \le -1 \\ x+5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ f) $h(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si } x \ne 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } 1 \le x \le 4 \\ x-2 & \text{si } > 4 \end{cases}$ h) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \le 0 \\ 2x-3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ i) $g(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1-x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-2} & \text{si } 2 \le x < 6 \\ |x-2|-2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ k) $g(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & \text{si } x \le -5 \\ x+1 & \text{si } -5 < x < 2 \\ 8 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Representación gráfica de funciones racionales

Una función racional es una función que es el cociente de dos polinomios $p(x)/q(x)$ con $q(x) \ne 0$

Son funciones racionales las siguientes: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $f(x)=\dfrac{x^2+9}{x+3}$ $f(x)=\dfrac{x^2}{x-4}$

El dominio de este tipo de funciones está constituido por aquellos valores reales que no anulen el denominador.

$\text{Dom } f(x) = \{ x \in R / q(x) \ne 0 \}$

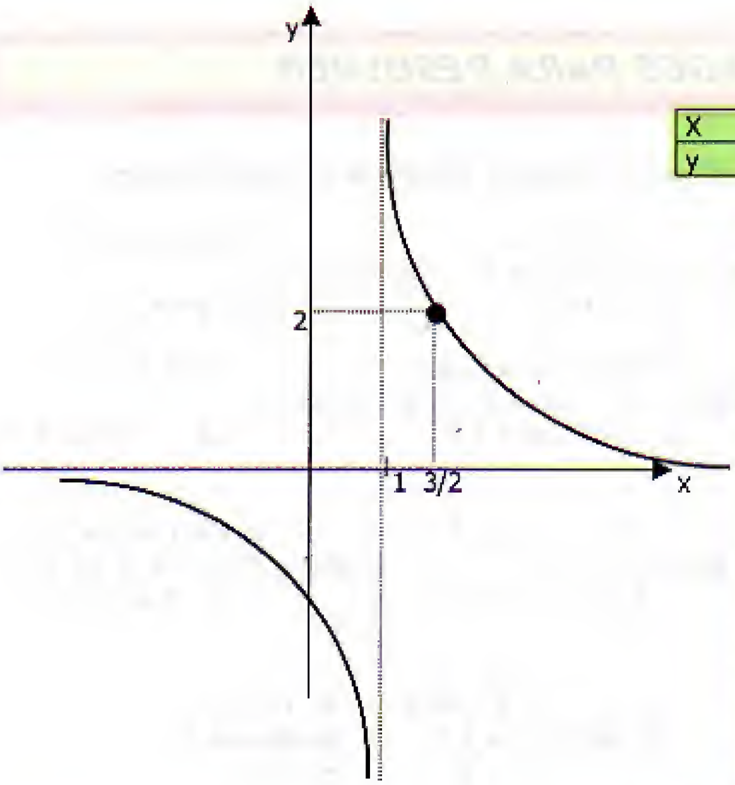
Ejemplo Representemos gráficamente la función dada por: $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

Solución

Debemos determinar primero el dominio de la función, con el objeto de conocer el conjunto de valores que debemos darle a x.

Este tipo de función no está definida cuando el denominador es igual a cero, por lo que debe cumplirse que $x - 1 > 0$.

$X - 1 > 0 \longrightarrow x > 1$. Luego $\text{Dom } f = (1, +\infty) = R - \{1\}$



TABLA

x	5	2	3/2	1/2	-1	5/2
y	1/4	1	2	-2	-1/2	2/3

En la gráfica puede observarse que para valores de x cercanos 1 por la izquierda la función toma valores muy grandes negativos.

Para valores de x cercanos 1 por la derecha la función toma valores muy grandes positivos.

En estas condiciones se dice que en x = 1 hay una **asíntota**.

La recta x = 1 es una **asíntota vertical**.

Hay una **asíntota horizontal** en la recta y = 0

Puede observarse entonces que para trazar la gráfica se deben trazar primero las asíntotas, después se señalan los puntos de corte con los ejes y los puntos intermedios, obteniéndose la gráfica observada en la figura anterior.

El rango de la función viene dado así: $\text{Rgo } f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = R - \{0\}$

La función anterior, definida como $f: R - \{1\} \longrightarrow R - \{0\}$, es **inyectiva** porque cada par de elementos diferentes del dominio tienen imágenes diferentes en el rango. Toda recta paralela al eje horizontal corta a la representación gráfica de la función en un solo punto (**inyectividad**)

La función es **sobreyectiva** porque el rango está todo cubierto. Toda recta paralela al eje horizontal corta a la representación gráfica de la función (**sobreyectividad**) .

Es biyectiva por ser inyectiva y sobreyectiva.

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

Representa gráficamente las siguientes funciones y determina el dominio y el rango.

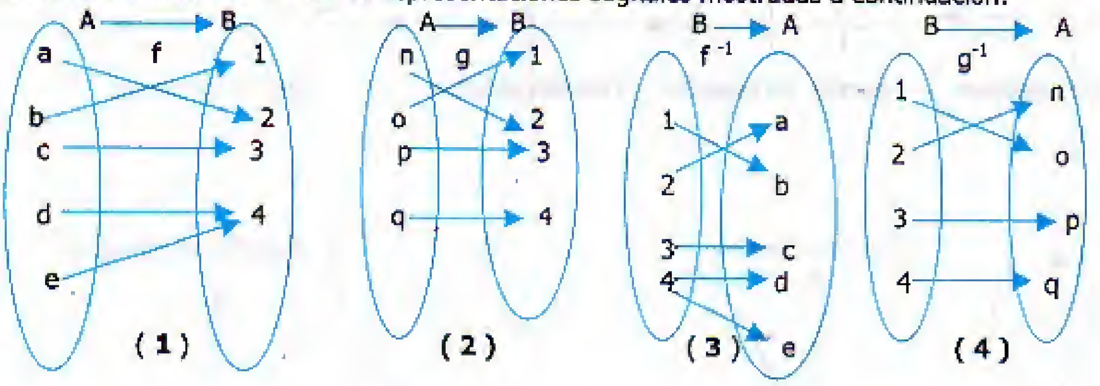
a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ **b)** $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$ **c)** $g(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ **d)** $h(x) = \dfrac{3x-5}{x-2}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ **f)** $g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ **g)** $h(x) = \dfrac{2x-4}{x+4}$ **h)** $g(x) = \dfrac{\sqrt{3x-5}}{x-2}$

Respuestas: a) R – {-3} b) R – { 2 } c) R – { 2 } d) R – { 2 }
e) R – { 1 } f) R – { - 2 } g) R – { - 4 } [5/3,2] □ (2, + ∞)

1.11 Estudio de la función inversa

Observemos detenidamente las representaciones sagitales mostradas a continuación:



La función f: A ⟶ B representada en el diagrama (1) es una función **sobreyectiva** pero **no es_inyectiva**. Nótese, que dos elementos distintos en el dominio tienen la misma imagen en el rango. Todo esto nos indica que la función **no es biyectiva**.

En el diagrama (3) hemos cambiado a una relación de B en A. Hemos intercambiado dominio y rango con respecto al diagrama (1). Este diagrama (3) no representa una función, porque el elemento 4 del dominio tiene dos imágenes d y e. Esto contradice la definición de función.

Como puede notarse no es posible obtener una función f: B ⟶ A.

En el diagrama (2) se tiene una función que es inyectiva y sobreyectiva y como consecuencia será biyectiva.

Si en el diagrama (4) intentamos obtener una relación de B en A nos encontramos que g: B ⟶ A es una función.

Esta función obtenida así se llama **función inversa**, denotándose como g^{-1} : B ⟶ A

El dominio de g se transforma en el rango de g^{-1} y el rango de g se transforma en el dominio de g^{-1}

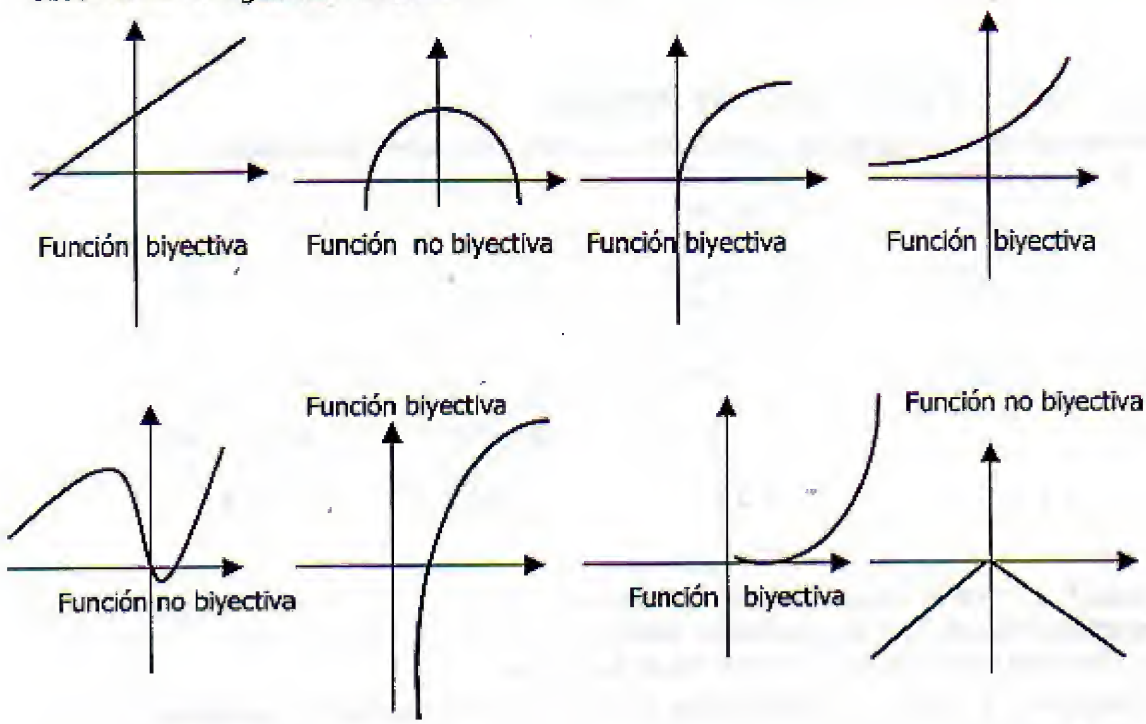
1 ⟶ 0	$f^{-1}(1) = 0$
2 ⟶ n	$f^{-1}(2) = n$
3 ⟶ p	$f^{-1}(3) = p$
4 ⟶ q	$f^{-1}(4) = q$

Como puede notarse, una función f: A ⟶ B tiene inversa si cumple con la condición de ser biyectiva (inyectiva y sobreyectiva).

En general decimos:

Una función f(x) tiene inversa, $f^{-1}(x)$, sí y solo sí f(x) es una función biyectiva

Observemos las siguientes funciones



Observaciones

Para que una gráfica represente una función biyectiva deben cumplirse dos condiciones:

La prueba de la recta vertical, en la cual toda recta vertical que corte a la gráfica debe hacerlo en un solo punto (condición para ser función).

La prueba de la recta horizontal, en la cual toda recta horizontal debe cortar a la gráfica en no más de un punto (condición para ser biyectiva).

Cómo determinar analíticamente la función inversa

Para determinar la expresión que define a una función inversa debemos realizar los siguientes pasos:

1. Comprobar que la función es biyectiva.
2. Intercambiar las variables **x** por **y** y **y** por **x**
3. Se despeja y en la ecuación. La ecuación que resulta es la función inversa.
4. Se intercambian el conjunto de partida y el de llegada.

Ejemplo 1

Dada la función $y = 4x + 2$, determinemos la función inversa y grafiquemos $f(x)$ y $f^{-1}(x)$

Solución

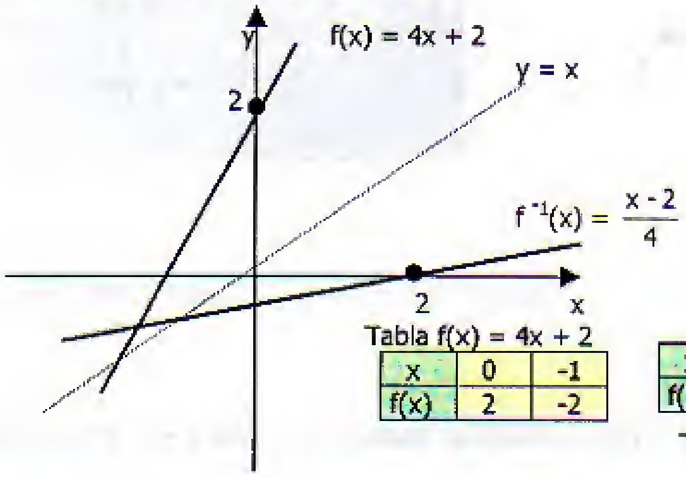
La función afín sabemos que es biyectiva, tal como fue estudiado anteriormente. Esto nos indica que dicha función tiene inversa.

Intercambiemos las variables, quedándonos que $x = 4y + 2$.

Si despejamos y de la expresión anterior nos queda que:

$$x - 2 = 4y$$
$$y = \frac{x-2}{4}$$
$$y = f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4}$$

Grafiquemos $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ sobre el mismo eje de coordenadas, con el objeto de observar Las características de ambas gráficas.



Las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas con respecto a la recta $y = x$, bisectriz del primer cuadrante.

Dom f = dom f^{-1} = R

Rgo f = Rgo $f^{-1}(x)$ = R

Tabla $f(x) = 4x + 2$

x	0	-1
f(x)	2	-2

x	2	6
f(x)	0	1

Tabla de $f^{-1}(x)$

Ejemplo 2

Dada la función f: [0 , +∞] ⟶ [4 , +∞] definida como $f(x) = x^2 - 4$ determinar la función inversa y graficar $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

Solución

Sabemos que la representación gráfica de una función cuadrática es una parábola. Esta gráfica corresponde a una función que no es inyectiva, es sobreyectiva y, por lo tanto no es biyectiva y como consecuencia no tiene inversa.

La función considerada tiene una restricción en el dominio que la hace biyectiva y por lo tanto en éstas condiciones tendría inversa.

Construimos una tabla que nos permite darle valores a x dentro del dominio

Tabla para $f(x) = x^2 - 4$

X	0	1	3	2
f(x)	-4	-3	5	0

Determinemos la coordenada x del vértice

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{0}{2.1} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

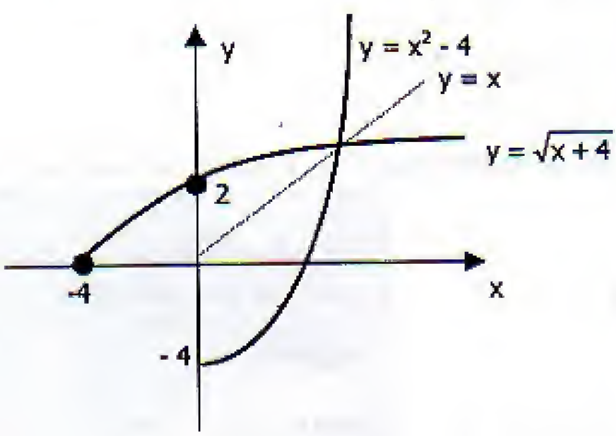
Si sustituimos $x = 0$ en $y = x^2 - 4$ entonces $y = 4$, luego el vértice sería $V(0, -4)$

Como el coeficiente de x^2 es $a > 0$ la parábola abre hacia arriba

Determinemos los Puntos de corte con los ejes

Hagamos $x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2$

Luego usamos $x = 2$ como el punto donde la semi-parábola corta al eje x



Observando la gráfica $y = x^2 - 4$ notamos que:
Dom f = $[0, +\infty)$
Rgo f = $[-4, +\infty)$
Si intercambiamos las variables para encontrar $f^{-1}(x)$ tendremos :
$y = x^2 - 4$
$x = y^2 - 4 \Longrightarrow x + 4 = y^2$
$\Longrightarrow y^2 = x + 4$
$\Longrightarrow y = \pm\sqrt{x+4}$

Tabla para $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$

x	0	-4	5
$f^{-1}(x)$	2	0	3

Dom $f^{-1} = [-4, +\infty)$ Rgo $f^{-1} = [0, +\infty)$

Aquí ocurre, que las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto a la recta $y = x$, bisectriz del primer cuadrante.

Las gráficas de dos funciones inversas $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son siempre simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante

Ejemplo 3

Dada la función $y = x^{-3/5} + 2$ encontrar la expresión analítica que represente la función inversa.

Solución

Primero intercambiamos las variables, escribiéndose que $x = y^{-3/5} + 2$

$$x = y^{-3/5} + 2 \Rightarrow y^{-3/5} = x - 2 \Rightarrow \frac{1}{y^{\frac{3}{5}}} = x - 2 \Rightarrow \frac{1}{x-2} = y^{3/5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-2} = \sqrt[5]{y^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-2)^5} = y^3$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{1}{(x-2)^5}}$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{1}{x-2}\right)^{5/3}$$

$$\Rightarrow y = (x-2)^{-5/3}$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.- Dada la función $y = f(x) = \frac{1}{4}x + 3$. Determinar la inversa de dicha función. **R:** $y = 4x - 12$

2.- Dada la función $y = 3x + 1$, encuentra una expresión que defina la función inversa y haz las gráficas de ambas funciones. **R:** $y = \frac{x-1}{3}$

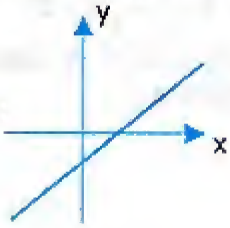
3.- Dada la función $y = \sqrt{x}$ para $x > 0$, encontrar una expresión que defina la función inversa y graficar ambas funciones. **R:** $y = x^2$

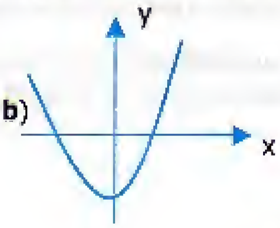
4.- Dado $y = f(x) = \sqrt{x+1}$, $x \geq -1$. Hallar $f^{-1}(x)$ y graficar $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el mismo eje. **R:** $y = x^2$

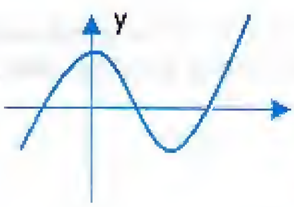
5.- Sea $f: (0, +\infty) \longrightarrow (-1, +\infty)$ tal que $f(x) = x^2 - 1$. Hallar la expresión de la función inversa y graficar $f(x)$ y $f^{-1}(x)$. **R:** $y = \pm\sqrt{x+1}$

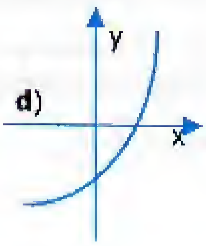
6.- Sea $y = f(x) = \frac{x}{x+2}$. Encuentra una expresión que defina a la función inversa. **R:** $y = \frac{2x}{1-x}$

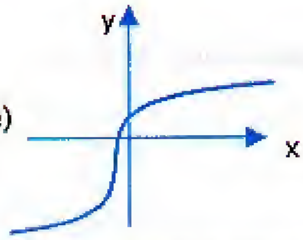
7.- Utilizar las gráficas dadas para determinar si la función tiene inversa.

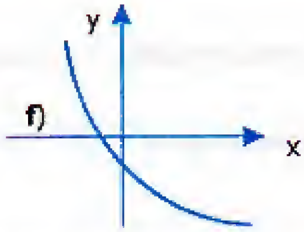
a) 

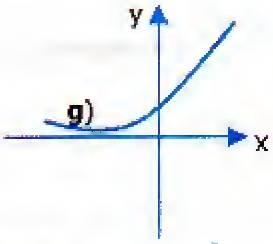
b) 

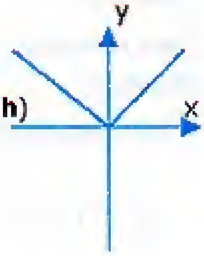
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

8.- Verificar en cada caso si f(x) y g(x) son funciones inversas.

a) $f(x) = x - 1$; $g(x) = x + 1$ **b)** $f(x) = x^3$; $g(x) = \sqrt[3]{x}$ **c)** $f(x) = 5x + 4$; $g(x) = \dfrac{x-4}{5}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{5}$; $g(x) = 3x - \dfrac{6}{5}$ **e)** $f(x) = \dfrac{4x}{x+4}$; $g(x) = \dfrac{4x}{4-x}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x+5}{2x+1}$; $g(x) = \dfrac{5-x}{2x-1}$

g) $y = x^3 - 12$; $y = \sqrt[3]{x+12}$ **h)** $y = x^3 + 5$; $y = \sqrt[5]{x-5}$

9.- En cada una de las funciones dadas determine su inversa.

a) $y = 2\sqrt{x} - 7$ **R:** $y = \dfrac{1}{4}(x+7)^2$ **b)** $y = (x-1)^2$ **R:** $y = \sqrt{x} + 1$ **c)** $y = \sqrt[3]{x+1}$ **R:** $y = x^3 - 1$

d) $y = x^{-5/7} + 1$ **R:** $y = (x-1)^{-7/5}$ **e)** $g(x) = \dfrac{2x+5}{3x-2}$ $x \neq 2/3$ **R:** $y = \dfrac{2x+5}{3x-2}$

f) $f(x) = \sqrt{2x-7}$ **R:** $y = \dfrac{x^2-7}{2}$ **g)** $f(x) = \sqrt[3]{x^3-5}$ **R:** $y = \sqrt[3]{x-2}$

h) $g(x) = x^3 + 2$ **R:** $y = \sqrt[3]{x-2}$ **i)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ **R:** $y = \dfrac{1}{1-x}$

j) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ **R:** $y = x^3 + 1$ **k)** $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ **R:** $y = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

ℓ) $y = \dfrac{x^2-4}{x^2+1}$ **R:** $y = \pm\sqrt{\dfrac{4+y}{1-y}}$

10.- Dada la función f: $R \longrightarrow R$ tal que $f(x) = x^2 + 1$. Hallar: **a)** $f^{-1}(5)$ **b)** $f^{-1}(4/3)$
c) $f^{-1}([1,5])$ **d)** $f^{-1}([1,4])$.
R: **a)** 2, -2 **b)** $\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3$ **c)** [0 , 2] **d)** [0 , $\sqrt{3}$]

11.- Dada la función $g(x) = |x| + 2$ hallar: a) $g^{-1}(9/4)$ b) $g^{-1}(3)$ c) $g^{-1}([3 , 5])$
R: a) 1/4, -1/4 b) 1 y –1 c) [5 , 7]

12.- La función $y = f(x) = \dfrac{5}{9}(x-32)$ transforma grados Fahrenheit, x, en grados Celsius, y.
Determine la función inversa que cambia grados Celsius a grados Fahrenheit. **R:** $y = \dfrac{9}{5}x + 32$

13.- La función $y = f(x) = \pi x^2$ se puede utilizar para determinar el área,y, de un círculo de radio x. Determine la función inversa que da el radio cuando se conoce el área de un circulo.

R: $x = \pm\sqrt{y/\pi}$

1.12 Estudio de la función exponencial

Recordemos antes algunas propiedades de la potenciación referidas tanto a exponentes enteros como a exponentes racionales. Debe tenerse presente que a>0 y b>0.

1. $(a\,b)^n = a^n\,b^n$	4. $\dfrac{a^m}{b^n} = a^{m-n}$	
2. $(a^m)^n = a^{mn}$	5. $a^{-n} = \dfrac{1}{n}$	7. $a^0 = 1$
3. $a^m.a^n = a^{m+n}$	6. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.- Haz uso de tu calculadora y realiza las operaciones que se te presentan a continuación.

a) $-3{,}7.(1{,}2)^{-2}$ **R:** -0,044

b) $0{,}1.(2{,}1)^2 - 5{,}7$ **R:** 15,3

c) $3{,}9^{-2} + 3$ **R:** 3,089

d) $2^{1/2} + 3^{1/2}$ **R:** 3,146

e) $2^{-3} + 1$ **R:** 1,125

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + 2$ **R:** 3,5

g) $3^{-1/2} + 2$ **R:** 2,577

h) $(1 + 0{,}06)^{10}$ **R:** $1{,}06.10^{10}$

i) $\left(1 + \frac{1}{8}\right)^{12}$ **R:** $1{,}125.10^{12}$

j) $3^{-1,5}$ **R:** $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

k) $3^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ **R:** 28/9

2.- Encuentre en cada caso el valor de A:

a) $A = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$ para valores de r = 1 k = 365 t = 2 **R:** 7,3689

b) $A = 10000\left(1 + \frac{0{,}10}{4}\right)^{72}$ **R:** 59172,28

c) $A = P.a^{kt}$ para p = 100 k = 0,10 t = 7 a = 2 **R:** 162,45

d) $A = \left(1 + \frac{1}{525600}\right)^{525600}$ **R:** 2,7188

e) $A = h\,k^{-rt}$ para h = 4,7; k = 2,1; r=- 0,018 t = 12 **R:** 5,6169

f) $A = C + (T - C)2^{-kt}$ para C = 45 T = 35 k = -2,1 t = 10 **R:**- 20971475

Función exponencial de base a

Una función exponencial es una función de la forma $y = f(x) = a^x$, donde a es un número real positivo distinto de 1. De acuerdo a esto podemos escribir en símbolos lo siguiente:

Una función de la forma $y = f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$, es una **función exponencial**, donde a es la **base** de la función exponencial.

Son ejemplos de funciones exponenciales: $y = 2^x$, $y = 5^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

Debemos hacer notar que si $a = 1$, entonces a^x se transforma en $1^x = 1$ y se tendría una función constante. Es ésta, la razón por la cual se impone en la definición que $a \neq 1$

Cómo graficar una función exponencial

Para graficar una función exponencial se toman valores para x, determinando los correspondientes valores de y o f(x), para finalmente localizar los puntos sobre un eje de coordenadas.

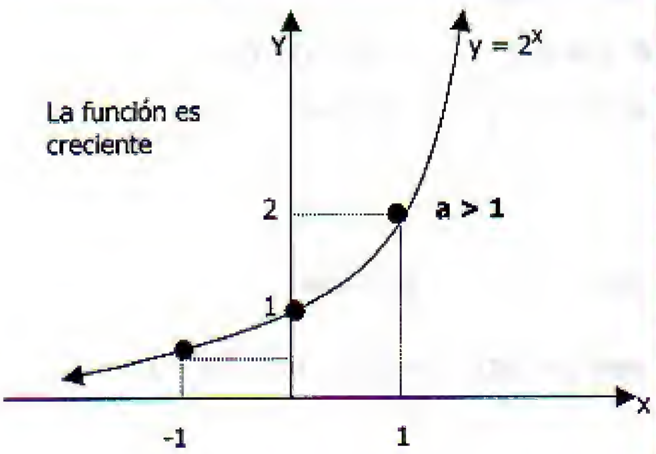
Ejemplo 1

Grafiquemos la función exponencial $y = 2^x$. Nótese que $a > 1$

TABLA DE DATOS

x	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
$y=2^x$	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625

La función es creciente



De la gráfica podemos observar varios aspectos:

Cuando x aumenta ($x \to +\infty$) los valores de y aumentan con rapidez, mientras que cuando los valores de x disminuyen ($x \to -\infty$) los valores de y se acercan cada vez más a 0. En este caso se dice que el eje x es una **asíntota horizontal.** La función es creciente

Por otro lado, no existen intersecciones con el eje x porque $b^x \neq 0$ para cualquier valor de x.

La intersección con el eje y es el punto (0,1) ya que $b^0 = 1$.

Como x puede ser cualquier número real, **el dominio** de la función exponencial es el conjunto de los números reales. Dom f = $(-\infty , +\infty) = \mathbb{R}$.

La base de una función exponencial es siempre positiva. Esto nos indica que el valor que adquiere y o f(x) es siempre positivo, indicándonos que el rango es el conjunto de los números reales positivos. Rgo f = $(0 , +\infty] = \mathbb{R}^+$.

Esta gráfica está exhibiendo un **crecimiento exponencial**

Ejemplo 2

Grafiquemos la función exponencial $y = (\frac{1}{2})^x$, es decir $0 < a < 1$

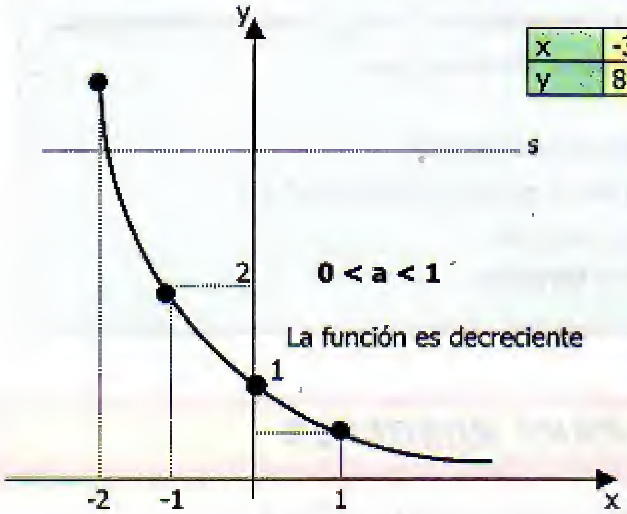


TABLA DE DATOS

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16

En la función puede observarse que:

Dom f = R = $(-\infty , +\infty)$

Rgo f = R^+ = $(0 , +\infty)$

Cuando x tiende a $+\infty$ los valores de y se acercan cada vez más a 0. *Función decreciente.*

Cuando x tiende a $-\infty$ los valores de y aumentan con rapidez.

En ambas casos la gráfica cumple con el **criterio de la recta horizontal**, es decir, toda recta horizontal s corta a la gráfica en un solo punto. La función es **inyectiva**.

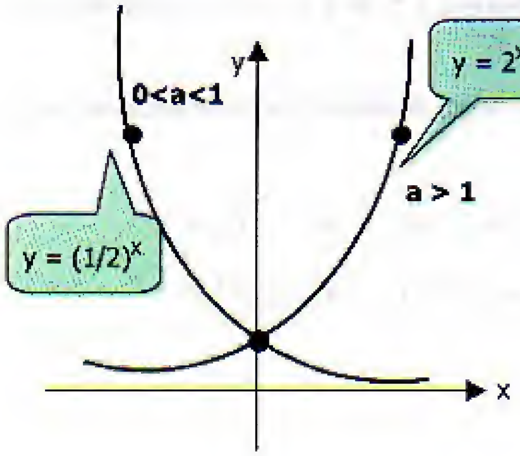
La gráfica muestra un decaimiento exponencial.

El cumplir la condición de la recta horizontal nos indica que la función es inyectiva, verificándose que:

$$a^r = a^s \Longrightarrow r = s$$

También es **sobreyectiva**, porque el rango de y = f(x) es el conjunto de todos los reales positivos R^+, todo el rango está cubierto, teniéndose una función f: R $\longrightarrow R^+$

Al ser la función inyectiva y sobreyectiva será **biyectiva**, existiendo entonces la función inversa de la función exponencial.



La figura está mostrando sobre un mismo eje las gráficas de $y = 2^x$ y $y = (1/2)^x$

Puede observarse que dichas gráficas son simétricas con respecto al eje vertical.

Propiedades de la funciones exponenciales

El dominio de la función exponencial es el conjunto de todos los números reales.
El rango de la función exponencial es el conjunto de todos los números reales positivos.
La gráfica de $y = a^x$ muestra un **crecimiento exponencial** si $a > 1$. **Función creciente.**
La gráfica de $y = a^x$ muestra un **decaimiento exponencial** si $0 < a < 1$. **Función decreciente.**
La intersección con el eje y es 1, no existiendo intersección con el eje x.
El eje x es una asíntota horizontal.
A mayor valor de a, mayor será la rapidez con que crece la función.
La gráfica de cualquier función exponencial pasa por el punto (0,1) porque $a^0 = 1$
Por ser $a^1 = a$, la gráfica pasará siempre por el punto (1,a).
Es **inyectiva** y **sobreyectiva**, razón por la cual es **biyectiva**.

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.- En la definición de función exponencial la base a fue restringida $(a > 0)$ y $(a \neq 1)$.
Si aceptamos la condición $a = 1$ ¿Qué le sucede a la función $y = a^x$?.
Si aceptamos que $a < 0$ ¿Qué sucederá con el dominio de $y = a^x$.

2.- Calcula los valores que toman las siguientes funciones para x = -2, -1, 0, 1, 2

a) $f(x) = 5^x$ b) $f(x) = 5^{-x}$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$

3.- Trazar las gráficas de $y = 2^x$, $y = 4^x$, $y = 6^x$ sobre un mismo eje de coordenadas. Analizar las similitudes y diferencias entre dichas gráficas.

4.- Trazar las gráficas de las funciones $y = (1/2)^x$, $y = (1/3)^x$, $y = (1/5)^x$ sobre un mismo eje de coordenadas. Analizar las similitudes y diferencias entre dichas gráficas.

5.- ¿Qué relación puedes establecer entre la gráfica de $y = 3^x$ con $y = 3^{-x}$?

6.- Si el precio de un producto crece de acuerdo a las funciones $y = 3x$ y $y = 3^x$ ¿Cuál de las dos funciones nos conviene si somos compradores?.

7.- En cada una de las siguientes funciones determine el rango, el dominio, las intersecciones con los ejes y las asíntotas.

a) $y = 3^x + 1$ **b)** $y = 3^{x+1}$ **c)** $y = (2/3)^x$ **d)** $y = 4^{x-1}$ **e)** $y = 10^x$ **f)** $y = 3^{-x}$

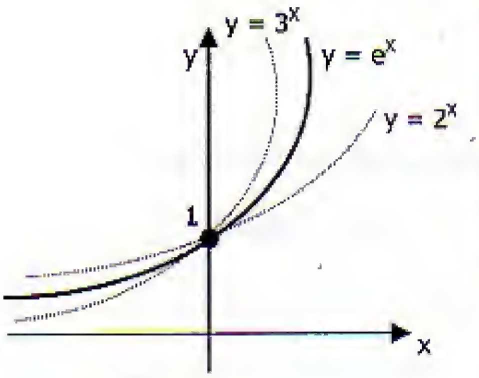
g) $y = (1/4)^{-x}$ **h)** $y = 3.2^x$ **i)** $y = 2^x - 3$ **J)** $y = 2^{x+4} - 3$ **k)** $y = 2^{x-2} - 3$

El número e

El número e, al igual que el irracional π es también un número irracional, el cual es usado frecuentemente para expresar una función exponencial muy especial llamada **función exponencial natural.**

Esta función exponencial natural queda definida así:

$$f(x) = e^x \text{ donde } e \approx 2{,}71828182........$$



Como **e** es un número comprendido entre 2 y 3, la gráfica de $y = e^x$ también muestra un crecimiento exponencial.
La gráfica de $y = e^x$ está ubicada entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, tal como lo está mostrando la figura de la izquierda.

Cómo determinar los valores de e^x con una calculadora

Cuando se desea determinar los valores de e^x a través de una calculadora científica debe procederse así:

- Se introduce el exponente e
- Después se oprime cualquiera de las teclas de segunda función, dependiendo de su calculadora, bien sea **shift, inv** o **2nd**
- Se oprime la tecla de logaritmo natural **ln**. Aquí se despliega el valor de e^x

Veamos con más claridad en la tabla a través de ejemplos

Ejemplo	Teclas a oprimir	Respuesta en pantalla
$e^{3,14}$	3,14 **inv ln**	23,103867
$e^{-2,456}$	2,456 ± **inv ln**	0,0857773
$e^{-4,524}$	4,524 ± **inv ln**	0,0108455
$12000e^{1,8}$	1,8 **inv ln x** 12000	72595,77
$5400e^{-2,5}$	2,5 ± inv ln x 5400	443,25899

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Existe otra forma de definir al número e a través de la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Evalúa la expresión anterior para los valores de n = 10; 20; 50; 100; 1000 y 10000. Compara los valores obtenidos con el valor del número e.

2. Graficar y analizar las siguientes funciones:

a) $y = e^x$ **b)** $y = e^{-x}$ **c)** $y = e^x - 1$ **d)** $y = 2e^x$

e) $y = e^{x-1}$ **f)** $y = e^x + 1$ **g)** $y = 3e^{-0,5x}$

3. Haz uso de tu calculadora científica y determina el valor de cada una de las expresiones:

a) $e^{7,214}$ **b)** $e^{-1,245}$ **c)** $e^{-0,05.120}$ **d)** $A = 4\,e^{-0,04.540}$ **e)** $M = 3,85\,e^{0,002.200}$

f) $H = 10\,e^{-0,0054\,.\,5}$ **g)** $P = 100\,e^{-0,025.8}$ **h)** $K = 20000\,e^{0,02.100}$ **i)** $L = 4,8\,e^{0,018.20}$

Respuestas: **a)** 1.358,3147 **b)** 0,2879409 **c)** $2,4788.10^{-3}$ **d)** $1,66.10^{-9}$ **e)** 5,743525
f) 9,7336124 **g)** 81,873075 **h)** 147781,12 **i)** 6,8799812

Aplicaciones de las funciones exponenciales

El **interés compuesto** es una ley de capitalización tal que los intereses obtenidos al final de cada período se acumulan al capital para producir nuevos intereses en el siguiente período.

Si en una cuenta se depositan P bolívares y dicha cuenta paga intereses k veces al año, a una tasa anual r, el saldo A en la cuenta después de t años viene dada por la expresión siguiente:

$$\boxed{A = P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}}$$

Ejemplo 1

Una familia invierte 1.200.000 Bs en una cuenta que paga 12% de interés anual. Si trimestralmente se reinvierten los intereses, ¿Cuánto habrá en la cuenta dentro de 2 años?.

Solución

De acuerdo a los datos se tiene que P = 1.200.000, r = 12/100= 0,12 t = 2 y k = 4 porque el interés se capitaliza trimestralmente (4 veces al año).

$$A = 1.200.000\left(1+\frac{0,12}{4}\right)^{4.2} = 1.200.000\,(1+0,03)^8 = 1.200.000\,(1,03)^8 = \mathbf{1.520.124,1}$$

En 2 años la cuenta tendrá un saldo de **1.520.124,1 Bs.**

También por otro lado se habla de un **interés compuesto continuo** a través de la fórmula del **crecimiento exponencial** la cual se expresa así:

Si una cantidad P aumenta a una tasa anual r compuesta continuamente, la cantidad A después de t años viene dada por la expresión siguiente:

$$\boxed{A = P\,e^{rt}}$$

Si el exponente rt es negativo el crecimiento representa una disminución, llamándosele **modelo de decaimiento exponencial.**

Es importante aclarar que $r > 0$ siempre.

La diferencia radica en que el exponente rt es positivo si hay crecimiento exponencial, en cambio rt será negativo si hay decaimiento exponencial.

También es necesario decir que si la tasa de crecimiento o decrecimiento está dada como un porcentaje es necesario convertirla a su forma decimal.

Ejemplo 2

¿A cuánto aumentarán 1.200.000 Bs. invertidos durante 2 años al 12% de interés anual compuesto continuamente?.

Solución

$A = Pe^{rt} = 1.200.000\ e^{0,12(2)} = 1.200.000\ e^{0,24} = 1.525.499$

Después de 2 años la cuenta tendrá 1.525.499 Bs.

Ejemplo 3

Los científicos cuando intentan determinar la edad de los fósiles emplean el fechado mediante carbono 14. La fórmula tradicionalmente usada en el fechado mediante carbono 14 viene dada por la siguiente expresión: $A = A_0 \cdot 2^{-t/5600}$ donde A_0 representa la cantidad de carbono 14 al formarse el fósil y A representa la cantidad de carbono 14 presente después de t años.

Si en un organismo existían 500 gramos de carbono cuando murió, ¿cuántos gramos se encontrarán en el fósil después de 2000 años.

Solución

$A = A_0 . 2^{-t/5600} = 500\ (2)^{-2000/5600} = 500.\ (0,7807092) = 390,355$ gramos

Ejemplo 4

Según un estimado, la población mundial ascendía en el año 1986 4,8 miles de millones de habitantes. Si la población mundial creciera a razón de 2% anual. ¿Cuál debe ser la población mundial en el año 2010?.

Solución.

De acuerdo al modelo de crecimiento se tiene que $A = P\ e^{rt}$ con rt positivo.

En este caso se tendrá que $t = 2010 - 1986 = 24$ años.

$P = 4,8$ la cantidad de población en 1986.

$r = 0.02$ (equivalente decimal de 1,8%).

Sustituyendo los valores en la expresión se tendrá que:

$A = 4,8\ e^{0,02t} = 4,8\ e^{0,02(24)} = 4,8\ e^{0,48} = 7,76$

De esta manera la cantidad de población en la tierra ha de ser de 7,76 miles de millones de personas.

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.- Se tiene una cuenta bancaria en la cual se depositan 200.000 Bs. al 6% de interés anual, compuesto mensualmente. Calcular la cantidad de dinero que habrá en dicha cuenta al término de 15 años. **R: 490.818,71**

2.- En una cuenta de ahorros que paga 8% anual compuesto semestralmente se depositan 400.000 Bs. Suponiendo que no se efectúan retiros ni depósitos, calcular el monto que debe colocarse al ahorrista a los seis años. **R: 640.412,89 Bs.**

Debe recordarse que si el interés es compuesto quincenalmente el valor de $k = 24$, si es compuesto trimestralmente el valor de $k = 4$, si es compuesto diariamente $k = 365$.

3.- Se invierte en un banco 500.000 Bs. con una tasa de interés del 12% compuesto en forma continua. Calcular el saldo de la cuenta luego de 2 años. **R: 635.624,58 Bs**.

4.- La cantidad de población de un país es 22 de millones de personas. Si dicha población crece a una tasa de 1,2% al año, ¿cuál ha de ser la cantidad de población al cabo de 10 años?.
R: 24,8 millones

5.- La expresión para cierto cultivo bacteriano viene dada por $f(t) = Be^{0,04t}$ donde f(t) bacterias se encuentran presentes a los t minutos de tiempo y B representa una constante. a) Si inicialmente se encuentran 2500 bacterias encontrar el valor de B. b) con el valor de B anterior cuántas bacterias habrá dentro de 2 horas. **R: a) 2500 b) 303776,04 bacterias**

Sugerencia: calcular primero el valor de f(0) para obtener el valor de la constante B.

6.- La expresión que representa el valor de depreciación de un equipo de sonido después desierto tiempo t , años después de adquirirlo es $V(t) = Be^{-0,20t}$ donde B es una constante. ¿Cuál será su valor después de 3 años, sabiendo que fue adquirido en 180000 Bs.?.

R: 98786,095 Bs.

7.- Un isótopo radiactivo llamado estroncio 90 decae en forma exponencial a razón de 2,8% al año. La expresión para determinar la cantidad de estroncio 90 que queda después de transcurridos t años viene dada por $P = P_0\, e^{-0,028t}$. Con los datos observados calcular el número de gramos de estroncio 90 cuando hayan transcurridos después de 80 años, sabiendo que inicialmente hay 1200 gramos de estroncio 90. **R: 295,9 gramos**

8.- En forma continua se invierten 5000 Bs. al 8% de interés compuesto. ¿Cuál es el balance de la cuenta después de 2 años?. **R: 5867,55 Bs.**

9.- Un estimado para la población mundial en 1994 era de 5,66 miles de millones de personas. Según un estimado, la población mundial continuará creciendo a una tasa del 2% anual. La expresión que permite obtener la población mundial, en miles de millones, en t años, viene dada por $P(t) = 5,66e^{0,02t}$. ¿Cuál será la población mundial esperada para el año 2000?
R: 6,38 miles de millones

10.- Para un cierto producto, el porcentaje de un mercado objetivo f(t) que adquiere el producto está en función del número de días, t, durante los cuales se anunció el producto. La función que describe esta relación viene dada por $f(t) = 1 - e^{-0,04\,t}$. ¿qué porcentaje del mercado objetivo compra el producto después de 50 días de anunciarlo? **R: 86,47%**

11.- Se agrega agua y cloro continuamente en un depósito de tal manera que la cantidad de gramos de cloro en el depósito al transcurrir un tiempo de t horas viene dado por la expresión siguiente:

$$c(t) = 100 - 30\, e^{-t/10}$$

Calcular: a) ¿Cuánto cloro existe en el depósito inicialmente (cuando t = 0)?. b) ¿Cuánto cloro existe en el depósito después de 5 horas?. c) ¿Cuánto cloro hay después de 100 horas?.

R: a) 70 gramos b) 81,8 gramos c) 100 gramos

Actividades complementarias

1. Dada la función $f(x) = x^2 + bx + c$, ¿qué valor deben tener los coeficientes b y c para que la gráfica de la función pase por los puntos P(1, 1) y Q(- 1, 3) **R:** b = - 1, c = 1.
2. Dada la función $f(x) = -2x + 3$, hallar la expresión analítica de la función inversa.
   R: x = 3-y/2.
3. Sea la función $f(x) = \dfrac{3}{x^2+2}$ definida en los reales. Hallar: f(- 2), f(0), f(- 2/3), f($\sqrt{5}$).
   R: 1/2, 3/2, 27/22, 3/7
4. Si la gráfica de la función $f(x) = 3x + b$ contiene el punto de coordenadas (5, - 2), hallar el valor de b. **R:** b = - 17.
5. Si la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - bx + 1$ contiene el punto de coordenadas (1, 7), hallar el valor de b. **R:** b = - 4.
6. Dada la función $f(x) = \dfrac{3x-8}{x^2-9}$ su dominio es:
   a) R – {- 3, 3} b) (- 3, 3) c) [- 3, 3] d) R
7. El dominio de la función $f(x) = -\sqrt{x-1}$ es:
   a) (1, +∞) b) [1, +∞) c) R – { 1 } d) R
8. Dada la función $h(x) = \dfrac{2x+5}{x-1}$ el dominio de $h^{-1}(x)$ es:
   a) R b) [2, 0) c) R – { 2 } d) R – { 1 }
9. La función $f(t) = 2t^2 + 5t$ expresa la distancia recorrida por un móvil en función del tiempo, donde t se mide en segundos (s) y f (t) en metros. Calcular la distancia recorrida por el móvil entre los instantes t = 1 s y t = 2 seg. ¿Cuánto tiempo tardará el móvil en recorrer una distancia de 75 metros?. **R:** 11 m y 5 s.
10. Se da la función f (x) definida de la forma siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x^2+1}{x-2} & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcular: f (- 3), f (- 1), f (0), f (1), f (2).

R: f (- 3) = 9 f (- 1) = - 2/3 f(0) = - 1/2 f(1) = - 2 f (2) = $\sqrt{5}$

11. La expresión inversa de la función $h(x) = \sqrt{x^2-2}$ es:
    a) $\sqrt{2-x^2}$ b) $\pm\sqrt{x^2-2}$ c) $X^2 - 2$ d) $\pm\sqrt{x^2+2}$
12. Dadas las funciones $y = \dfrac{x^2-5x}{x^2+5}$, x = t + 1, hallar y en función de t **R:** $y = \dfrac{t^2-3t-4}{t^2+2t+6}$

ESTUDIO DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

2.1 La función logarítmica

Hemos estudiado que la función exponencial $y = a^x$ ($a > 0$ y $a \neq 1$) es biyectiva y como consecuencia tiene una función inversa.

Partimos de la función $y = 3^x$ y tratemos de encontrar la función inversa.

Si intercambiamos las variables x por y nos queda que $x = 3^y$

Al tratar de despejar la variable y se nos hace imposible, puesto que no existe un procedimiento algebraico que pueda ser utilizado para despejar a y.

La expresión $x = 3^y$ significa que y es el exponente al que es necesario elevarse la base 3 para obtener x.

Esta misma idea es expresada a través de la siguiente definición:

Para $a > 0$ y $a \neq 1$ el logaritmo en base a de un número $x > 0$ es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$\log_a x = y \text{ es equivalente a } x = a^y$$

La palabra log es una abreviatura de la palabra logaritmo.

$y = \log_a x$ se lee: " y es igual al logaritmo de x en la base a" o " y es igual al logaritmo base a de x"

La expresión $x = a^y$ está en **forma exponencial.**

La expresión $y = \log_a x$ está en **forma logarítmica.**

Se les llama **logaritmos decimales o de Briggs** cuando la base es $a = 10$. Ellos se expresan simplemente por log en vez de $\log_{10}$, es decir:

$$\log_{10} x = \log x$$

Se les llama **logaritmos naturales o neperianos** cuando la base es $a = e$

$$\log_e x = \ln x$$

La siguiente tabla trata de ilustrar la equivalencia de las formas exponencial y logarítmica.

FORMA EXPONENCIAL	FORMA LOGARÍTMICA
$3^2 = 9$	$\log_3 9 = 2$
$2^3 = 8$	$\log_2 8 = 3$
$5^{-3} = \frac{1}{125}$	$\log_5 \left(\frac{1}{125}\right) = -3$
$5^{1/2} = \sqrt{5}$	$\log_5 \sqrt{5} = 1/2$
$3^0 = 1$	$\log_3 1 = 0$
$a^k = N$	$\log_a N = k$
$b^n = x$	$\log_b x = N$
$10^{-3} = 0{,}001$	$\log_{10} 0{,}001 = -3$

2.2 Consecuencias inmediatas de la definición de logaritmo

En forma exponencial sabemos que $a^y = x$ .... (A)
En forma logarítmica sabemos que $y = \log_a x$ ......(B)
Si sustituimos (B) en (A) se tendrá que:

$$a^{\log_a x} = x \;..........(C)$$

Si sustituimos (A) en (B) se tendrá que:

$$y = \log_a a^y \;..........(D)$$

Intentemos ahora demostrar que $\log_{a^n} a^m = \dfrac{m}{n}$
Igualando el primer miembro de la última expresión a k, podemos escribir:

$$\log_{a^n} a^m = k \;.............(E)$$

$$(a^n)^k = a^m \quad \text{(escribiéndose en forma exponencial)}$$

$$a^{nk} = a^m \quad \text{(efectuando potencia de una potencia)}$$

$$nk = m \quad (\text{ porque si } a^r = a^s \text{ entonces } r = s)$$

$$k = \frac{m}{n} \quad \text{(despejando k)}$$

Sustituyendo el valor de k en la expresión (E) obtenemos que:

$$\boxed{\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}}$$

Resumiendo tenemos el siguiente cuadro

1.- $x = a^y$ si y sólo si $y = \log_a x$

2.- $a^{\log_a x} = x$

3.- $\log_a a^y = y$

4.- $\log_{a^n} a^m = \dfrac{m}{n}$

Problemas resueltos

Problema 1 Escribir en forma logarítmica las siguientes expresiones:

a) $h^k = p$ b) $7^2 = 49$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$ d) $(m^2)^{1/2} = a$

e) $(\sqrt{2})^x = 1024$ f) $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1/2} = \sqrt{2}$

Soluciones

a) $\log_h p = k$ b) $\log_7 49 = 2$ c) $\log_{1/3} 81 = 4$ d) $\log_{m^2} a = \frac{1}{2}$

e) $\log_{\sqrt{2}} 1024 = x$ f) $\log_{27} \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ g) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = -\frac{1}{2}$

Problema 2 Escribir cada expresión en forma exponencial:

a) $\log_3 81 = 4$ b) $\log_a p = k$ c) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$ d) $\log_{\sqrt{2}} 16 = x$

e) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right) = 3$ f) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4$ g) $\log_{\sqrt{a}} p = N$ h) $\log_{2\sqrt{\frac{5}{3}}}\left(\frac{3}{20}\right) = -2$

Soluciones

a) $3^4 = 81$ b) $a^k = p$ c) $4^{-3} = \frac{1}{64}$ d) $(\sqrt{2})^x = 16$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ f) $3^{-4} = \frac{1}{81}$ g) $(\sqrt{a})^N = P$ h) $\left(2\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{-2} = \frac{3}{20}$

Problema 3 Escribir cada logaritmo en forma exponencial y determine la incógnita

a) $\log_x 9 = 2$ b) $\log_5 125 = t$ c) $\log_t\left(\frac{1}{8}\right) = -3$ d) $\log_{\sqrt{2}} x = 3$

e) $\log_2 8\sqrt{20} = h$ f) $\log_x \frac{\sqrt{6}}{3} = -\frac{1}{2}$ g) $\log_5 0{,}04 = n$

Soluciones:

a) $\log_x 9 = 2$

Si escribimos la raíz en forma exponencial queda:

$$x^2 = 9$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros

$$x = \pm\sqrt{9}$$

Extraemos la raíz cuadrada de 9

$$x = \pm 3$$

Obtenemos dos valores de x

$$x = 3 \text{ y } x = -3$$

b)

$\log_5 125 = t$

Si lo escribimos en forma exponencial queda:

$$5^t = 125$$

Expresemos el segundo miembro como una potencia de base 5

$$5^t = 5^3$$

Si $b^r = b^s \Rightarrow r = s$ se tendrá que:

$$\mathbf{t = 3}$$

c)

$\log_t\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

$t^{-3} = \frac{1}{8}$ escribiendo en forma exponencial

$\frac{1}{t^3} = \frac{1}{8}$ porque $t^{-3} = \frac{1}{t^3}$

$t^3 = 8$ multiplicando en cruz

$t = \sqrt[3]{8}$ extrayendo raíz cúbica en ambos miembros

$t = 2$ extrayendo raíz cúbica de 8 que es igual a 2

d)

$\log_{\sqrt{2}} x = 3$

Si se escribe en forma exponencial se tiene :

$(\sqrt{2})^3 = x$.

Operando la raíz se tiene que :

$x = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2.2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$

e)

$\log_x \frac{\sqrt{6}}{3} = -\frac{1}{2}$

$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ escribiendo en forma exponencial

$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ porque $x^{-½} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ escribiendo $x^{½}$ en forma de raíz

$\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{6}}$ despejando $\sqrt{x}$

$x = \frac{9}{6}$ elevando ambos miembros al cuadrado

$\mathbf{x = \frac{3}{2}}$ simplificando

f)

$\log_2 8\sqrt{2} = n$

Escribiéndolo en forma exponencial

$2^n = 8\sqrt{2}$

Como $8 = 2^3$ y $\sqrt{2} = 2^{1/2}$ escribimos la expresión anteriro como

$2^n = 2^3 . 2^{\frac{1}{2}}$

aplicando producto de potencias de igual base

$2^n = 2^{7/2}$

$n = \frac{7}{2}$

g) $\log_5 0{,}04 = n$

$5^n = 0{,}04$ escribiendo en forma exponencial

$5^n = \frac{4}{100}$ escribiendo 0,04 en forma de fracción

$5^n = \frac{1}{25}$ simplificando

$5^n = \frac{1}{5^2}$ escribiendo 25 en forma de potencia

$5^n = 5^{-2}$ porque $1/5^2$

$n = -2$ por igualdad de potencias de la misma base

Problema 4 Sabiendo que $\log_{\sqrt{3}} k = 2$ encontrar el valor de N en $\log_3 k = N$

Solución

De la primera expresión debemos encontrar el valor de k, para lo cual la debemos escribir en forma exponencial, quedándonos:

$(\sqrt{3})^2 = k$ de donde $k = 3$

Sustituimos luego el valor de $k = 3$ en la expresión $\log_3 k = N$, quedándonos que:

$\text{Log}_3 3 = N$

$3^N = 3$ escribiendo la expresión a su forma exponencial

$N = 1$ si dos potencias de la misma base son iguales sus exponentes son iguales

Problema 5

5.- Si $\log_{\sqrt{3}} a = 6$ encontrar el valor de t en la expresión $t = \log_a 9$

Solución

Calculemos primero el valor de la base a en la expresión $\log_{\sqrt{3}} a = 6$, para usarla en la segunda.

$\log_{\sqrt{3}} a = 6$

$(\sqrt{3})^6 = a$ (escribiendo la expresión en forma exponencial)

$3^3 = a$ (desarrollando la raíz)

$\mathbf{a = 27}$ (desarrollando la potencia de base 3)

Si sustituimos a = 27 en la expresión $t = \log_a 9$ nos queda lo siguiente:

$t = \log_{27} 9$

$27^t = 9$ (escribiendo la expresión en forma exponencial)

$3^{3t} = 3^2$ (escribiendo ambos miembros en potencias de base 3)

$3t = 2$ (porque si $b^r = b^s$ entonces $r = s$)

$\mathbf{t = 3/2}$ (despejando t)

Problema 6 Dadas las expresiones siguientes $P = \log_{2/3} \frac{81}{16}$ $R = \log_{4/25} \frac{5}{2}$ $K = \log_{125} 5$

$L = \log_{27} 243$ calcular el valor de X en la expresión $X = \frac{R+P}{K+L}$

Solución

Partiendo de cada una de las expresiones dadas podemos obtener los valores de P, R, K y L

$P = \log_{2/3} \frac{81}{16}$

$(\frac{2}{3})^P = \frac{81}{16}$ (escribiendo la expresión en forma exponencial)

$= \frac{3^4}{2^4} = (\frac{3}{2})^4 = (\frac{2}{3})^{-4}$ (escribiendo 81/16 en forma de potencia)

$(\frac{2}{3})^P = (\frac{2}{3})^{-4} \Longrightarrow \boxed{P = -4}$ (por igualdad de potencias de la misma base).

$R = \log_{4/25} \frac{5}{2}$

$(\frac{4}{25})^R = \frac{5}{2}$ (escribiendo la expresión en forma exponencial)

$(\frac{2^2}{5^2})^R = \frac{5}{2}$ (escribiendo $4 = 2^2$ y $25 = 5^2$)

Si en el primer miembro aplicamos la potencia de una potencia y en el segundo miembro el opuesto de 5/2 nos queda que:

$(\frac{2}{5})^{2R} = (\frac{2}{5})^{-1} \Longrightarrow 2R = -1 \Longrightarrow \boxed{R = -\frac{1}{2}}$

$\log_{125} 5 = k$

$125^k = 5$ (escribiendo en forma exponencial)

$(5^3)^k = 5$ (escribiendo 125 en potencia de base 5)

$5^{3k} = 5$ (por potencia de una potencia en el primer miembro)

$3k = 1$ (porque si $b^r = b^s$ entonces $r = s$)

Si despejamos k nos queda que: $\boxed{K = \frac{1}{3}}$

$\text{Log}_{27} 243 = L \Longrightarrow 27^L = 243 \Longrightarrow 3^{3L} = 3^5 \Longrightarrow 3L = 5$

Despejando L nos queda que: $\boxed{L = \frac{5}{3}}$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión $X = \dfrac{R+P}{K+L}$ se tiene:

$$X = \frac{-\frac{1}{2} - 4}{\frac{1}{3} + \frac{5}{3}} = \frac{\frac{-1-8}{2}}{\frac{6}{3}} = \frac{-\frac{9}{2}}{2} = -\frac{9}{4} \longrightarrow \boxed{X = -\frac{9}{4}}$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.- Escribir las expresiones logarítmicas dadas en forma exponencial y las expresiones exponenciales en forma logarítmica.

a) $\log_3 81 = 4$ b) $\log_{1/2} \frac{1}{8} = 3$ c) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$ d) $4^{-2} = \frac{1}{16}$ e) $(\frac{1}{2})^{-5} = 32$

f) $a^n = k$ g) $5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$ h) $27^{-1/3} = -\frac{1}{3}$. i) $\log_{1/3} \frac{27}{8} = -3$ j) $\log_8 \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$

k) $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$ ℓ) $\log_{10} 1000 = 3$ m) $(\frac{1}{3})^{-3} = 27$ n) $\log_{\sqrt{a}} 2 = k$ o) $81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

p) $\log_x 3 = n$ q) $\log_{16} k = -\frac{a}{b}$ r) $10^{-2} = 0{,}01$ s) $\log_k (n+1) = h$ t) $\log x = \pi$

Respuestas

a) $3^4 = 81$ b) $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ c) $4^{-3} = \frac{1}{64}$ d) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$ e) $(\frac{1}{2})^{-5} = 32$

f) $\log_a k = N$ g) $\log_5 \sqrt[4]{5} = \frac{1}{4}$ h) $\log_{27} \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ i) $(\frac{2}{3})^{-3} = \frac{27}{8}$ j) $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

k) $16^{3/4} = 8$ ℓ) $10^3 = 1000$ m) $\log_{1/3} 27 = -3$ n) $(\sqrt{a})^k = 2$ o) $\log_{81} \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$

p) $x^n=3$ q) $16^{-\frac{a}{b}} = k$ r) $\log_{10} 0{,}01 = -2$ s) $k^h = n+1$ t) $10^\pi = x$

2.- Escribe cada logaritmo en forma exponencial y luego determina el valor de la incógnita.

a) $\log_2 8 = x$ b) $\log_4 64 = x$ c) $\log_{1/2} \frac{1}{8} = t$ d) $\log_{1/3} \frac{1}{81} = k$ e) $\log_9 3 = n$

f) $\log_7 h = 1$ g) $\log_a \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}$ h) $\log_{27} b = -\frac{1}{3}$ i) $\log_{2\sqrt{2}} y = 2$ j) $\frac{1}{3} = \log_8 x$

k) $\log_4 N = \frac{3}{2}$ ℓ) $\log_{1/2} V = -3$ m) $\log_{1/4} 64 = p$ n) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{16} = y$

o) $\log_{2\sqrt{5}/3} \frac{9}{20} = t$ p) $\log_{\sqrt{2}} C = -3$ q) $\log_{1/5} = \sqrt[3]{7825}$ r) $\log_{\sqrt{2}} x = 2/3$

Respuestas

a) $x = 3$ b) $x = 3$ c) $t = 3$ d) $k = 4$ e) $h = 1/2$ f) $h = 7$ g) $a = 1/3$ h) $b = 1/3$

i) $y = 8$ j) $x = 2$ k) $N = 8$ ℓ) $V = 8$ m) $p = -3$ n) $y = 8/3$ o) $t = -2$ p) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

q) $-7/3$ r) $x = \sqrt[3]{2}$

3.- Sabiendo que $\log_{27} x = -\frac{1}{3}$ encontrar el valor de k en $\log_3 k = \frac{1}{3}$

4.- El logaritmo de 27 en una cierta base es 3/4. Calcular la base y el logaritmo de 9 en dicha base.

5.- Si $\log_x \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$ encontrar el valor de m en la expresión $\log_{1/2} m = x$

6.- Sabiendo que $\log_{27} 9 = k$ encontrar el valor de n en la expresión $\log_8 n = k$

7.- Sabiendo que $\log_3 t = 4$; $\log_3 9 = b$ y $\log_9 3 = c$ calcular el valor de x en la expresión siguiente: $X = \frac{t+b}{c}$

8.- Sabiendo que $\log_{36} a = -\frac{1}{2}$; $\log_{100} \frac{1}{100} = b$; $\log_c 5^3 = 3$; $\log_d \frac{9}{4} = 2$, evaluar la expresión: $M = \frac{a+b}{c+d}$

9.- Sabiendo que $\log_{4/25} \frac{5}{2} = h$; $\log_9 a = -1$ y $\log_b 64 = -\frac{3}{2}$. Evaluar $A = \frac{h+a}{b}$

10.- Si $\log_b \sqrt{b^3} = x$; $\log_{10} 0{,}000001 = y$; $\log_8 \frac{1}{4} = z$; $\log_9 3 = u$. Calcular $N = \frac{x+y}{z+u}$

Respuestas

3. **R:** $k = \sqrt[3]{3}$	4. **R:** 81 y 1/2 .	5. **R:** $\frac{1}{65.536}$	6. **R:** n = 4
7. **R:** 166	8. **R:** $-\frac{8}{39}$	9. **R:** -56/9	10. **R:** 27

2.3 Gráfica de la función logarítmica

La gráfica de la función logarítmica la analizaremos para a > 1 y para 0 < a < 1

Primer caso. Para a>1

Sea la función logarítmica expresada así $y = \log_2 x$

Para graficar esta función bastará con determinar y graficar puntos (x , y).

Sabemos que $y = \log_2 x \Longrightarrow x = 2^y$

Con $x = 2^y$ construimos una tabla de datos, dándole valores a y para obtener valores de x.

Tabla de $y = \log_2 x$ o $x = 2^y$

x	1/6	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

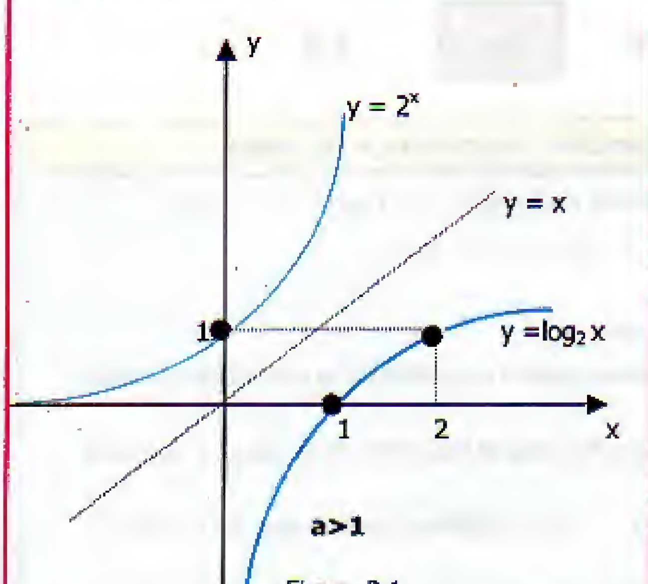


Figura 2.1

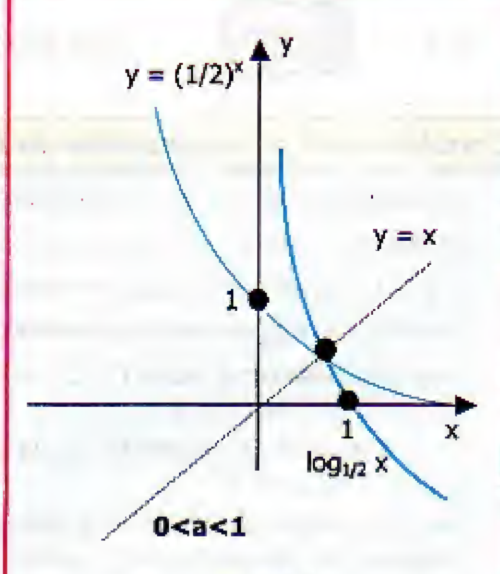


Figura 2.2

La gráfica de la izquierda, la de mayor grosor(figura 2.1), es equivalente a $y = \log_2 x$.

Es una curva creciente que pasa por los puntos (1 , 0); (2 , 1).

El dominio y el rango vienen dados así: Dom f = (0, +∞) Rgo f = (-∞ , +∞) = R.

Segundo caso. Para 0<a<1

Grafiquemos $y = \log_{1/2} x$

La expresión anterior la escribimos como $x = (\frac{1}{2})^y$

Construimos una tabla de valores, seleccionando valores para y, e ir obteniendo valores para x.

Tabla de $y = \log_{1/2} x$ o $x = (1/2)^y$

x	16	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

En la figura 2.2, la gráfica de mayor grosor es equivalente a $y = \log_{1/2} x$.

Es una curva *decreciente* que pasa por los puntos (0 , 1); (2 , -1)

El dominio y el rango vienen dados así: Dom f = (0 , +∞) Rgo f = (-∞ , +∞)

¿Qué relación existe entre la función exponencial y la función logarítmica?

De las figuras 2.1 y 2.2 puede notarse que las gráficas de la función exponencial y la función logarítmica *son simétricas* con respecto a la recta y = x, bisectriz del primer cuadrante.

Esta simetría era de esperarse, puesto que las funciones exponencial y logarítmica son inversas entre sí.

Si en una calculadora introducimos un número cualquiera y se pulsa la tecla 10^x y a continuación la tecla log, ¿qué se obtiene?

Por ejemplo

6,5 $\boxed{10^x}$ **3162277,66** $\boxed{\log}$ **6,5**

Conclusiones o propiedades de la función logarítmica de base a

- **El dominio** es el conjunto de todos los números reales positivos. Dom f = (0, +∞)
- **El rango** son todos los números reales. Rgo f = (-∞ , +∞) = R
- Si a > 1, $\log_a$ es **una función creciente.**
- Si 0 < a < 1, $\log_a$ es **una función decreciente.**
- La gráfica pasa por el punto (1 , 0), indicándonos que el logaritmo de la unidad en cualquier base es cero. $\mathbf{Log_a\ 1 = 0}$
- La gráfica pasa por el punto (a , 1), lo que significa que el logaritmo de la base es igual a la unidad. $\mathbf{Log_a\ a = 1}$
- Como la función es positiva en el intervalo (1 , +∞) del dominio, significa que los números mayores que 1 tienen logaritmo positivo.
- Como la función es negativa en el intervalo (0 , 1) del dominio, significa que los números menores que 1 tienen logaritmo negativo.
- El $\log_a x$ no está definido si x es negativo o cero.
- **Es inyectiva**, puesto que cualquier recta horizontal que tracemos sobre la gráfica la intercepta como máximo en un punto.
- **Es sobreyectiva**, pues su recorrido es el conjunto R.
- **Es biyectiva**, por ser inyectiva y sobreyectiva

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.- Para cada par de funciones inversas construye las gráficas sobre un mismo eje.

a) $y = (\frac{1}{4})^x$ $y = \log_{1/4} x$ b) $y = 4^x$ $y = \log_4 x$ c) $y = (\frac{2}{5})^x$ $y = \log_{2/5} x$

d) $y = 3^x$ $y = \log_3 x$ e) $y = 2^x$ $y = \log_{1/2} x$

2.- Grafica la función logarítmica en cada caso

a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_5 x$ c) $y = \log_{10} x$ d) $y = \log_{1/3} x$

3. Dadas las expresiones $\log_x = 1024$ y $\log_y = \frac{1}{2187}$, calcular el valor de P en la expresión siguiente: $P = x + y$ **R:** 13/3

4. Si $m = \log_3 \frac{\sqrt{3}}{9}$ y $\log_4 n = -\frac{1}{2}$, evaluar m + n **R:** - 1

5. Ordena de menor a mayor cada uno de los siguientes logaritmos:

$\log_4 2$, $\log_2 (1/2)$, $\log_4 (1/8)$, $\log_2 2$, $\log_3 9$, $\log_{1/4} 2$, $\log_{1/9} 1$, $\log_{1/4} (1/8)$, $\log_{1/2} 8$, $\log_{1/3} (1/2)$.

6. Sin utilizar la calculadora y aplicando la definición de logaritmo calcula X + Y + Z, sabiendo que: $\log 10 = X$, $\log 0{,}1 = Y$, $\log \sqrt{0{,}01} = Z$ **R:** - 1

7. Si $\log_x 10 = 0{,}25$ el valor de x es igual:

a) 100

b) 1000

c) 10.000

d) 100.000

8. Si $\log_{36} \sqrt{6} = x$ el valor de x viene dado por:

a) $x = 1/4$

b) $x = 4$

c) $x = 1/2$

d) $x = 1$

Actividades complementarias

1. Si $2 = \log_4 k$, entonces el valor de k es:

a) 64 b) 4 c) 8 d) 16

2. Si $-3 = \log_{1/4} m$, entonces el valor de m es:

a) 1/64 b) 64 c) - 1/64 d)

3. Verificar que $\log_x 5 = -3$ entonces $x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

4. Usa la definición de logaritmo y ordena de menor a mayor cada una de las siguientes expresiones: $\log_4 2$, $\log_2(1/2)$, $\log_4(1/8)$, $\log_3 9$, $\log_{1/3}(1/2)$, $\log_{1/9} 1$, $\log_{1/4} 2$.

5. Si $a = \log_2 64$ y $b = \log_3 \dfrac{\sqrt{3}}{9}$ calcular el valor de a + b **R**: 9/2

6. Sabiendo que $\log_{1/3} m = -5$, $\log_4 n = -1/2$ y $k = \log_{16} 2$, calcular el valor de la expresión siguiente: $\dfrac{m.n}{k}$ **R**: 486

7. Sabiendo que $\log_a 1024 = 5$; $\log_{2/5} b = 1$; $\log_2 0{,}0625 = c$ y $\log_{\sqrt{3}} 729 = d$, calcular el valor de P en $P = \dfrac{a+b}{c-d}$ **R**: - 13/32

8. Dada la función definida como $f(x) = (\sqrt{3})^x$ evaluar: a) f(- 3) b) f(- 1/2) c) f(6)

R: a) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ c) 27

9. Demuestra que si $\log_3 \sqrt{x} = 1/2$ entonces $x = \sqrt[4]{x}$

10. Demuestre que si $\log_x \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = -3$ entonces $x = \sqrt[6]{8}$

11. Sin hacer uso de la calculadora, aplicando la definición de logaritmo, encuentra los valores siguientes:

a) $\log_{1/5} 125$ **R**: -3 b) $\log_{11} \sqrt[3]{121}$ **R**: 2/3 c) $\log_{1/6} \sqrt[7]{216}$ **R**: -3

12. Determina el punto en el que la gráfica de cada una de las funciones siguientes corta al eje de las abscisas.

a) $y = \log(x+3)$ **R**: -2 b) $y = \log_3 \sqrt{3x}$ **R**: 1/3 c) $y = \log_5\left(\dfrac{5}{x}\right)$ **R**: 5

13. Si $\log_3 \sqrt{k} = \dfrac{1}{2}$, el valor de k es:

a) 3 b) −3 c) $\sqrt{3}$ d) 512

14. Si $\log_p \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = -3$, el valor de p es:

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{2\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$ d) $2\sqrt{2}$

APLICACIONES DE LAS PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

3.1 Propiedades de los logaritmos

Aquí mostraremos algunas de las propiedades que nos ayudarán a desarrollar los logaritmos y a resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Supondremos que a, x, e y son positivos ($a \neq 1$).

Logaritmo de la unidad	Logaritmo de la base
El logaritmo de la unidad en cualquier base es igual a cero, ya que $a^0 = 1$ $\log_a 1 = 0$	El logaritmo de la base, para toda base, es igual a la unidad, ya que $a^1 = a$ $\log_a a = 1$
Logaritmo de un producto	**Logaritmo de un cociente**
El logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de los factores $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$	El logaritmo del cociente de dos números es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
Logaritmo de una potencia	**Logaritmo de una raíz**
El logaritmo de una potencia de la base es el producto del exponente por el logaritmo de la base $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$	El logaritmo de la raíz de un número es igual al logaritmo del número dividido por el índice de la raíz. $\log_a \sqrt[r]{n} = \frac{\log_a n}{r}$
Logaritmo de una potencia de la base	**Dos propiedades importantes**
El logaritmo de una potencia de la base es el exponente $\log_a a^n = n$	$a^{\log_a x} = x$ Si $\log_a x = \log_a y \Longrightarrow x = y$

Grupo de ejemplos 1

En cada una de las expresiones siguientes tomar logaritmos de base a usando las propiedades de los logaritmos.

1. $x = pqr$

   loga x = loga p + loga p + loga r

2. $X = \frac{UV}{K}$

   $\log_a X = \log_a U + \log_a V - \log_a K$

3.- $X = \dfrac{m^2\sqrt{n}}{k}$

$\log_a X = \log_a m^2 + \log\sqrt{n} - \log k = \mathbf{2\log_a m + \dfrac{\log_a n}{2} - \log_a k}$

4.- $x = \sqrt[3]{\dfrac{m^3n^2}{p^3q^2}}$

$$\log_a x = \frac{\log_a \dfrac{m^3n^2}{p^3q^2}}{3} = \frac{\log_a m^3n^2 - \log_a p^3q^2}{3} = \frac{\log_a m^3 + \log_a n^2 - (\log_a p^3 + \log_a q^3)}{3}$$

$$\boxed{\log_a x = \frac{3\log_a m + 2\log_a n - 3\log_a p - 2\log_a q}{3}}$$

5.- Desarrollar la siguiente expresión: $\log_a\left[\dfrac{\sqrt[3]{3mn^2}}{\sqrt{pq^3}}\right]^3$

$$\log_a\left[\frac{\sqrt[3]{3mn^2}}{\sqrt{pq^3}}\right]^3 = 3\log_a\frac{\sqrt[3]{mn^2}}{\sqrt{pq^3}} = 3\left[\log_a\sqrt[3]{mn^2} - \log_a\sqrt{pq^3}\right]$$

$$=3\left[\frac{\log_a mn^2}{3} - \frac{\log_a pq^3}{2}\right] = 3\left[\frac{\log_a m + \log_a n}{3} - \frac{\log_a p + 3\log_a q}{2}\right]$$

$$\log_a\left[\frac{\sqrt[3]{3mn^2}}{\sqrt{pq^3}}\right]^3 = \log_a m + 2\log_a n - \frac{3\log_a p + 9\log_a q}{2}$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

En cada uno de los ejercicios propuestos aplica las propiedades de los logaritmos y desarrolla tomando logaritmos en la base indicada. Expresa la respuesta de modo que no contenga logaritmos de productos, cocientes, raíces y potencias.

1) $\log_{10} 4(x+2)^3$ 2) $\log_5 \dfrac{(4-x)^2}{3}$ 3) $\log_8 \sqrt[5]{x+3}$ 4) $\log_9 \dfrac{\sqrt{x}}{12}$ 5) $\log_5 \dfrac{[x(x+4)]^3}{2}$

6) $\log_4 \sqrt{\dfrac{x^5}{x+4}}$ 7) $\log_5 \dfrac{\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{c}}$ 8) $\log_2 \dfrac{\sqrt[4]{xy}\,\sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{a-b}}$ 9) $\log_3\left[\dfrac{(a^2+b^2)c^2}{(a-b)(b+c)(c+d)}\right]^2$

10) $\log_a \left[\dfrac{m^{2/5}\, n^{1/3}}{k^4}\right]^5$ 11) $\log_a \dfrac{x^{\frac{1}{2}}\, y^{\frac{2}{3}} \sqrt{x-y}}{m^2 n^3}$ 12) $\log_a \dfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^{3/5} \sqrt[4]{x^3 y}}{m^3 \sqrt{mn}}$

13) Si $x = \sqrt{m^{-2}n \,.\, \sqrt[3]{mn^{-3}}}$ demuestra que $\log_a x = -\frac{2}{3}\log_a m - \frac{1}{2}\log_a n$

14)Demuestre la siguiente igualdad $\log_a \sqrt{\dfrac{x^{-3}y\sqrt{xy^3}}{m^3 n^{-1}}} = \dfrac{-5\log_a x + 5\log_a y - 6\log_a m + 2\log n}{4}$.

Usa las propiedades de los logaritmos

15) Demuestra que la función inversa de $y = 3^{\,2x-1}$ viene dada por la expresión $y = \dfrac{\log_3 x + 1}{2}$.

16) Calcula la función inversa de $y = 2^{3x-4}$

17. Usa tu calculadora y comprueba las siguientes igualdades.

a) $\log 1 = 0$ b) $\log 10 = 1$ c) $\log(4\,.\,5) = \log 4 + \log 5$

d) $\log\frac{4}{5} = \log 4 - \log 5$ e) $\log 4^3 = 3\log 4$ f) $\log\sqrt[3]{4} = \dfrac{\log 4}{3}$

Respuestas

1) $\log_{10} 4 + 3\log_{10}(x+2)$ 2) $2\log_5(4-x) - \log_5 3$ 3) $1/5 \log_8 (x+3)$

4) $1/2 \log_9 x - \log_9 12$ 5) $3\log_5 x + 3\log_5 (x+4) - \log_5 2$ 6) $5/2 \log_4 x - 1/2\log_4(x+4)$

7) $1/2 \log_5 a + 1/3 \log_5 b - 1/3 \log_5 c$ 8) $1/4 \log_2 x + 1/4 \log_2 y + 1/3 \log_2 a - 1/5 \log_2 (a-b)$

9) $2[\log_3 (a^2+b^2) + 2\log_3 c - \log_3 (a-b) - \log_3 (b+c) - \log_3 (c+d)]$

10) $2 \log_a m + 5/3 \log_a n - 20 \log_a k$

11) $1/2 \log_a x + 2/3 \log_a y + \dfrac{\log_a (x-y)}{2} - 2\log_a m - 3\log_a n$

12) $-29/10 \log_a m - 11/10 \log_a n + 3/4 \log_a x + 1/4 \log_a y$ 16) $y = \dfrac{\log_2 x + 4}{3}$

Grupo de ejemplos 2

Expresa como un logaritmo de una sola expresión cada una de las siguientes expresiones logarítmicas. En otras palabras, dado el logaritmo de una expresión, obtener la expresión que originó ese logaritmo.

1. $\log_a x + 3\log_a y - \frac{1}{2}\log_a z$

$= \text{Log}_a x + 3\log_a y - \frac{1}{2}\log_a z$

$= \log_a x + \log_a y^3 - \log_a \sqrt{z}$ (Aplicando logaritmo de una potencia y de una raíz)

$= \log_a (x.y^3) - \log_a \sqrt{z}$ (Aplicando logaritmo de un producto)

$= \log_a \frac{xy^3}{\sqrt{z}}$ (Aplicando logaritmo de un cociente)

2. $\log_7 (x+1) + 2\log_7 (x+4) - 3\log_7 (x-5)$

$= \log_7 (x+1) + \log_7 (x+4)^2 - \log_7 (x-5)^3$ (Aplicando logaritmo de una potencia)

$= \log_7 (x+1)(x+4)^2 - \log_7 (x-5)^3$ (Aplicando logaritmo de un producto)

$= \log_7 \frac{(x+1)(x+4)^2}{(x-5)^3}$ (Aplicando logaritmo de un cociente)

3. $\log_a x = 3\left[\frac{\log_a m}{5} + \frac{3\log_a n}{2} - \frac{4\log_a b}{5}\right]$

$\log_a x = 3\left[\log_a \sqrt[5]{m} + \frac{\log_a n^3}{2} - \frac{\log_a b^3}{5}\right]$ (logaritmo de una raíz y de una potencia)

$\log_a x = 3\left[\log_a \sqrt[5]{m}.\sqrt{n^3} - \log_a \sqrt[5]{b^4}\right]$ (logaritmo de un producto)

$= 3\log_a \frac{\sqrt[5]{m}.\sqrt{n^3}}{\sqrt[5]{b^4}}$ (logaritmo de un cociente)

$\log_a x = \log_a \left(\frac{\sqrt[5]{m}.\sqrt{n^3}}{\sqrt[5]{b^4}}\right)^3$ (logaritmo de una potencia

$x = \left[\frac{\sqrt[5]{m}.\sqrt{n^3}}{\sqrt[5]{b^4}}\right]^3$ (Aplicando la propiedad 9)

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

Expresar mediante un solo logaritmo cada una de los desarrollos o igualdades logarítmicas.

1) $2\log_b x + 1/3 \log_b y$

2) $\log_a x = \log_a m + \log_a n - \log_a k$

3) $\log_a x = 2\log_a m + 3\log_a n - \log_a b - 2\log_a c$

4) $\frac{1}{2}\log_b(x-2) - \log_b y + 3\log_b z$

5) $\log_a x = \frac{1}{3}\log_a(x+1) - \frac{1}{3}\log_b(x+z)$

6) $\log_{10} x + \log_{10}(x-4) - \log_{10}(x+1)$

7) $4\log_6 3 - [2\log_6(x+3) + 4\log_6 x]$

8. $\dfrac{\log_a m + \frac{1}{2}\log_a n - \log_a p}{5}$

9. $\frac{1}{4}[\log_5(m+n) + \log_5(m-n) - 3\log_5(p+q) - 2\log_5(p-q)]$

10. $\log_2 x = 3\left(\dfrac{\log_2 a}{5} + \dfrac{3\log_2 c}{2} - \dfrac{4\log_2 b}{5}\right)$

11. $\frac{1}{2}\log_a(x-2) - \log_a y + 3\log_a z$

12. $3\left(\dfrac{\log_a m}{2} + \dfrac{2\log_a n}{3} - \dfrac{4\log_a p}{5}\right)$

Respuestas

1) $\log_b\left(x^2\sqrt[3]{y}\right)$

2) $x = \dfrac{mn}{k}$

3) $x = \dfrac{m^2n^3}{bc^2}$

4) $\log_b \dfrac{z^3\sqrt{x-2}}{y}$

5) $x = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x+2}}$

6) $\log_{10}\dfrac{x(x-4)}{x+1}$

7) $\log_6 \dfrac{3^4}{(x+2)^2x^4}$

8) $\log_a \sqrt[5]{\dfrac{m\sqrt{n}}{p}}$

9) $\log_5 \sqrt[4]{\dfrac{(m+n)(m-n)}{(p+q)^3(p-q)^2}}$

10) $x = \left[\dfrac{\sqrt[5]{a}\,\sqrt{c^3}}{\sqrt[5]{b^4}}\right]^3$

11) $\log_a \dfrac{z^3\sqrt{x-2}}{y}$

12) $\log_a \left[\dfrac{\sqrt{m}\,\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[5]{p^4}}\right]^3$

3.2 Los logaritmos comunes o logaritmos decimales

El logaritmo común o logaritmo decimal de un número real positivo es el **exponente** al que debe elevarse la base 10 para obtener el número.

Si $\log N = L$ entonces $10^L = N$

Si $\log 5 = 0{,}6989 \Longrightarrow 10^{0{,}6989} = 5$

Si $\log 1000 = 3 \Longrightarrow 10^3 = 1000$

Cuando la base no se indica se supone que ella es 10, pudiéndose escribir la siguiente igualdad:

$$\boxed{\operatorname{Log}_{10} X = \log X}$$

Cómo determinar los logaritmos comunes con una calculadora

Es posible determinar mediante una calculadora los logaritmos comunes a través una tecla **log**.

Para determinar el logaritmo común de un número real mayor que cero, se introduce el número y se oprime a continuación la tecla del logaritmo, desplegándose la respuesta en pantalla.

Así, para calcular el log 25,4, basta reproducir la siguiente secuencia:

Se teclea 25,4 y luego la tecla **log**, apareciendo en el visor redondeado a milésimas: **1,405**

Veamos algunos ejemplos en la tabla siguiente:

Ejemplo	Teclas para oprimir	Desplegado en pantalla
Determinar log 400	400 log	2,60206
Determinar log 0,0538	0,0538 log	-1,2692177
Determinar log 6,35	6,35 log	0,80278
Determinar log 0,0056	0,0056 log	-2,251812
Determinar log 5,48	5,48 log	0,7387805

debemos recordar que no existen logaritmos de números negativos

Qué es un antilogaritmo

Si se conoce el logaritmo común de un número, cómo es posible determinar ese número.
Veamos:
Si se tiene que $\log N = 3{,}406$ nuestra función es determinar el valor del número N partiendo de su logaritmo.

Cuando determinamos el valor del número partiendo de su logaritmo se dice que estamos obteniendo el **antilogaritmo** o **inverso de logaritmo**.

$$\boxed{\text{Si } \log N = L \text{ entonces } N = \operatorname{antilog} L}$$

Si $\log N = 0{,}39794$ entonces $N = \operatorname{antilog} 0{,}39794 \Longrightarrow N = 2{,}49$

Si $\log N = -3{,}09691$ entonces $N = \operatorname{antilog} (-3{,}09691) \Longrightarrow N = 0{,}008$

Si $\log N = 1{,}81291$ entonces $N = \operatorname{antilog} 1{,}81291 \Longrightarrow N = 64{,}99$

Cómo determinar los antilogaritmos con una calculadora

Cuando deseamos obtener los antilogaritmos con una calculadora, es necesario introducir el logaritmo cuyo antilogaritmo se desea determinar, oprimiendo luego la tecla de segunda función, la cual según el tipo de calculadora puede pueden ser (**2nd** , **inv** o **SHIFT**). En los ejemplos que propondremos usaremos la tecla **Inv** porque es un tipo de calculadora.
Veamos la siguiente tabla:

Ejemplo	Teclas a oprimir	Desplegado en pantalla
Antilog 5,452618	5,452618 Inv log	283542,39
Antilog −2,345628	2,345628 ± **inv log**	0,004512
Antilog 0,3668	0,3568 Inv log	2,27405
Antilog −3,09691	3,09691 ± Inv log	0.00080

También es posible realizarlo utilizando la tecla $\mathbf{x^y}$.

Supóngase que sabemos que $\log_{10} N = 1,436$

Si $\log_{10} N = 1,436$ entonces $N = 10^{1,436}$

Oprimimos las siguientes teclas: 10 **inv** $\mathbf{x^y}$ **1,436** = .Aparece en el visor: 27,28977

Observaciones

Cuando se trate de determinar el antilogaritmo de un valor negativo debe introducirse el valor y luego oprimir la tecla ± antes de oprimir las teclas **inverso** y **logaritmo.**

3.3 Los logaritmos naturales

Es frecuente observar la presencia del número e en modelos matemáticos de algunos fenómenos naturales, razón por la cual a los logaritmos de base e se les llama **logaritmos naturales.**

Ellos, generalmente son representados por el símbolo **ln x**, que se lee "logaritmo natural de x"

$$\log_e X = \ln X$$

$$\boxed{\text{Para } X > 0 \ \text{ si } y = \ln X \Longrightarrow e^y = X}$$

Propiedades de los logaritmos naturales o neperianos

Las propiedades de los logaritmos comunes son también válidas para los logaritmos naturales.

1.- $\ln xy = \ln x + \ln y \quad (x > 0)\ y\ (y > 0)$

2.- $\ln \frac{x}{y} = \ln x + \ln y \quad (x > 0)\ y\ (y > 0)$

3.- $\ln x^n = n \ln x \quad (x > 0)$

4.- $\ln e^x = x$

5.- $e^{\ln x} = x \quad (x > 0)$

6.- $\ln x = k \Longrightarrow e^k = x$

De acuerdo a la propiedad 4 es posible establecer que: $\ln e^{kt} = kt$ y $\ln e^{-1,04t} = -1,04t$

De acuerdo a la propiedad 5 es posible establecer que: $e^{\ln(t+1)} = t + 1$ y $e^{\ln kt} = kt$

Cómo determinar los logaritmos naturales con una calculadora

Los logaritmos naturales también pueden ser determinados usando una calculadora que esté dotada de la tecla **ln** . Aquí se usa la tecla anterior en vez de la tecla **log**.
Veamos los ejemplos en la siguiente tabla:

Ejemplos	Teclas a oprimir	Desplegado en pantalla
Determina ln 356	356 **ln**	5,8749307
Determina ln 0,25	0,25 **ln**	-1,3862944
Determina ln 1320	1320 **ln**	7,185387
Determina ln 0,0056	0,0056 **ln**	-5,1849887

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.- Usa tu calculadora y determina el logaritmo en base diez de los siguientes números. Redondea a cuatro cifras decimales.

a) log 962 b) log 0,0042 c) log 870 d) log 0,0000857 e) log 36

f) log 27,700 g) log 0,0000375 h) log 0,00872 i) log 100 j) log 0,0001

k) log 0,0002 ℓ) log 200 m) log 125,4 n) log 0,001 o) 185,5

Respuestas

a) 2,9832 **b)** −2,3768 **c)** 2,9395 **d)** −4,0670 **e)** 1,5563 **f)** 1,4425 **g)** −4,4260

h) −2,0595 **i)** 2 **j)** −4 **k)** −3,6990 **ℓ)** 2,3010 **m)** 2,0983 **n)** −3 **o)** 2,2683

2.- Determina, usando la calculadora, el antilogaritmo del logaritmo dado. Expresar la respuesta con tres dígitos significativos.

a) 0,5416 b) −1,0585 c) 2,5011 d) 2,3201 e) −0,1543 f) −2,1724

g) 2,6464 h) 0,008356 i) 3,628545 j) −4,2665 k) −0,1256 ℓ) 3,5678

Respuestas

a) 3,48 **b)** 0,0874 **c)** 317 **d)** 209 **e)** 0,701 **f)** 0,007 **g)** 442,996 **h)** 1,019

i) 4251,528 **j)** 0,0000541 **k)** 0,749 **ℓ)** 3696,579

21) $2^{x} + 2^{x+2} + 2^{x+4} = 168$ **22)** $\sqrt{2^{x}\sqrt{4^{x}\sqrt{8^{x}}}} = \sqrt[4]{2^{2x+7}}$

Respuestas

1) $x = -1$ **2)** $x = -6$ **3)** $x = 0$ **4)** $t = 0{,}431$ **5)** $k = 1$ **6)** $t = 2$ **7)** $t = 2$ **8)** $k = 3$

9) $x = 3$ **10)** $x = 3$ **11)** $k = -8$ **12)** $k = 4{,}8$ **13)** $t = 2{,}81$ **14)** $k=1$ **15)** $n = 2$ **16)** $t = 4$

17) $k = -12{,}44$ **18)** $k = 1/8$ **19)** $x = 9/2$ **20)** $h = 0{,}36$ **21)** $x = 3$ **22)** $x = 2$

3.7 Sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Un sistema de ecuaciones logarítmicas es un sistema de ecuaciones en el que una al menos de las ecuaciones es logarítmica

Ejemplo 1

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 65 & (\mathrm{I}) \\ \log x + \log y = 3 & (\mathrm{II}) \end{cases}$

Aquí se tiene un sistema de ecuaciones donde la primera es polinómica y la segunda es logarítmica.

Tomemos la ecuación (II) y apliquemos las propiedades de los logaritmos

$\log x + \log y = 3$

Esta suma de logaritmos se convierte en el logaritmo de un producto, quedándonos que:

$\log xy = 3$

$\log xy = \log 1000$ (Porque $\log 1000 = 3$)

$xy = 1000$ (Sí $\log x = \log y$ entonces $x = y$. Propiedad 4)

El sistema inicial nos quedará así:

$$\begin{cases} x + y = 65 & (\mathrm{I}) \\ xy = 1000 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Si despejamos x de la ecuación $x + y = 65$ nos queda que $x = 65 - y$.

Sustituimos ésta expresión en (II), quedándonos que:

$(65 - y)y = 1000$

$65y - y^2 = 1000$ (Aplicando propiedad distributiva)

$-y^2 + 65y - 1000 = 0$ (Ordenando e igualando a cero)

$y^2 - 65y + 1000 = 0$ (Multiplicando por -1)

Resolvemos la ecuación de segundo grado aplicando la fórmula.

$$y=\frac{65\pm\sqrt{65^2-4.1.100}}{2}=\frac{65\pm\sqrt{4225-4000}}{2}=\frac{65\pm\sqrt{225}}{2}=\frac{65\pm 15}{2}$$

$$y=\frac{65\pm 15}{2}\quad y_1=\frac{65+15}{2}=40\qquad y_2=\frac{65-15}{2}=25$$

Sustituimos el valor de $y = 40$ en la ecuación (I) quedándonos que:

$x + 40 = 65$ de donde $x = 65 - 40 = 25$. Luego $x = 25$. $\boxed{x = 25 \quad y = 40}$

Ejemplo 2

Resolver el sistema $\begin{cases} x + y = 22 \\ \log x = 1 + \log y \end{cases}$

Aquí también se tiene una ecuación polinómica y otra logarítmica

Solución

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ \log x = 1 + \log y \end{cases}$$

Trabajemos con la segunda ecuación tratando de transformarla en una ecuación sin logaritmos, para lo cual debemos escribirla de la siguiente forma:

$\text{Log } x - \log y = 1$

$\text{Log } x - \log y = \log 10$ (Porque $1 = \log 10$)

$\log\frac{x}{y} = \log 10$ (Aplicando logaritmo de un cociente)

$\frac{x}{y} = 10$ (Porque si $\log x = \log y$ entonces $x = y$. Propiedad 4)

$x = 10\,y$

De esta manera el sistema inicial nos queda así:

$$\begin{cases} x + y = 22 \ldots\ldots\text{(I)} \\ x = 10\,y \ldots\ldots\text{(II)} \end{cases}$$

Si sustituimos $x = 10\,y$ en $x + y = 22$ nos queda que:

$10\,y + y = 22 \longrightarrow 11\,y = 22 \longrightarrow y = 22/11 \longrightarrow \mathbf{y = 2}$

Sustituyendo el valor de $y = 2$ en la ecuación (I) nos queda:

$x + 2 = 22 \rightarrow x = 22 - 2 \rightarrow$ **$x = 20$**

Luego $\boxed{y = 2 \quad x = 20}$

Ejemplo 3

Resolver el sistema $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

Aquí se tiene un sistema de dos ecuaciones logarítmicas que puede ser resuelto de dos formas distintas: método de reducción y por definición de logaritmo.

1. Por el método de reducción

$$\begin{array}{l} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \\ \hline 2\log x \quad = 4 \end{array}$$

Nótese que hemos sumado miembro a miembro para obtener:

$2\log x = 4 \rightarrow \log x = 4/2 \rightarrow \log x = 2 \rightarrow x = \text{antilog } 2 \rightarrow$ **$x = 100$**

Sustituyendo $x = 100$ en la segunda ecuación se tiene que

$\log 100 - \log y = 1$

$-\log y = 1 - \log 100$ (Transponiendo términos)

$\log y = -1 + \log 100$ (Multiplicando ambos miembros por -1)

$\log y = -1 + 2$ ($\log 100 = 2$)

$\log y = 1$ (Operando el segundo miembro)

$\log y = \log 10$ ($1 = \log 10$)

$y = 10$ (Si $\log x = \log y$ entonces $x = y$)

Luego $x = 100 \quad y = 10$

2. Por definición de logaritmo

$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

Si aplicamos logaritmo de un producto en la primera ecuación y logaritmo de un cociente en la segunda ecuación nos quedará el sistema como se muestra:

$$\begin{cases} \log x.y = 3 \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\,.\,y = \text{antilog } 3 \\ \dfrac{x}{y} = \text{antilog } 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\,.\,y = 1000 & (\text{antilog } 3 = 1000) \\ \dfrac{x}{y} = 10 & (\text{antilog } 1 = 10\ ) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\,.\,y = 1000 \,.........(\ \mathrm{I}\ ) \\ \dfrac{x}{y} = 10 \,..............(\ \mathrm{II}\ ) \end{cases}$$

Si despejamos x de (II) se tendrá que $x = 10\,y$.
Sustituyendo $x = 10y$ en I se tendrá la ecuación siguiente: $10\,y.\,y = 1000$

$10y^2 = 1000 \rightarrow y^2 = 100 \rightarrow y = \pm\sqrt{100} \rightarrow y = 10$

Ejemplo 4

Resolver el sistema
$$\begin{cases} \log k + 3\log n = 5 & (\text{I}) \\ \log\left[\dfrac{k^2}{n}\right] = 3 & (\text{II}) \end{cases}$$

Apliquemos las propiedades de los logaritmos en la ecuación (I) se tiene que:

$\log k + 3 \log n = 5$ (primera ecuación)
$\log k + \log n^3 = 5$ (logaritmo de una potencia al segundo término del primer miembro)
$\log k n^3 = 5$ (Aplicando logaritmo de un producto en el primer miembro)

$$\log k n^3 = 5 \longrightarrow k n^3 = \text{antilog } 5 \longrightarrow k n^3 = 10^5 \quad (\text{I})$$

$$\log\left(\frac{k^2}{n}\right) = 3 \longrightarrow \frac{k^2}{n} = \text{antilog } 3 \longrightarrow \frac{k^2}{n} = 10^3 \quad (\text{II})$$

Sí despejemos n de la ecuación (II) $n = \dfrac{k^2}{10^3}$ y la sustituimos en la ecuación (I) nos queda:

$$K\left(\frac{k^2}{10^3}\right)^3 = 10^5 \longrightarrow k.\frac{k^6}{10^9} = 10^5 \longrightarrow k^7 = 10^{14} \longrightarrow k = \sqrt[7]{10^{14}} \longrightarrow k = 10^2$$

Luego K = 100
Para encontrar el valor de n sustituimos el valor de K en la ecuación (I), quedándonos que:

$\log 100 + 3 \log n = 5$

$3 \log n = 5 - \log 100$ (Pasando log 100 al segundo miembro)

$3 \log n = 5 - 2$ (log 100 = 2)

$3 \log n = 3$

$\log n = \dfrac{3}{3}$ (Despejando log n)

$\log n = 1$

$n = \text{antilog } 1$ (Definición de antilogaritmo)

n = 10 (Aplicando antilogaritmo)

Luego $\boxed{K = 100 \qquad n = 10}$

Ejemplo 5

Resolver el siguiente sistema $\begin{cases} 2^{p+2q} = 32 \\ 2^{3p-5q} = 16 \end{cases}$

Este es un sistema de ecuaciones con dos ecuaciones exponenciales.

Si escribimos $32 = 2^5$ y $16 = 2^4$ nos queda que:

$$\begin{cases} 2^{p+2q} = 2^5 \\ 2^{3p-5q} = 2^4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} p + 2q = 5 & \text{(Por que si } a^x = a^y \text{ entonces } x = y) \\ 3p - 5q = 4 & \text{(Por que si } a^x = a^y \text{ entonces } x = y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p + 2q = 2^5 \text{ .... (I)} \\ 3p - 5q = 2^4 \text{ ....(II)} \end{cases}$$

En el sistema de ecuaciones multiplicamos la ecuación (I) por –3 con el objeto de eliminar p (método de reducción)

$$-3\begin{cases} p + 2q = 5 \\ 3p - 5q = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -3p - 6q = -15 \\ 3p - 5q = 4 \end{cases}$$

$$-11\,q = -11 \longrightarrow q = -1$$

Sustituyendo q = 1 en la ecuación (I) se tendrá que:

$P + 2.1 = 5 \longrightarrow p + 2 = 5 \longrightarrow p = 5 - 2 \longrightarrow p = 3$

Luego $\boxed{q = 1 \quad p = -3}$

Ejemplo 6

Resolver el sistema $\begin{cases} \log_a 25 = \log_b 4 \text{ .....(I)} \\ a \,.\, b = 10000 \text{ ......(II)} \end{cases}$

Una ecuación logarítmica y otra polinómica

Obsérvese que en la ecuación (I) los logaritmos son de base diferente. Esto nos indica que debemos usar la fórmula del cambio de base en cada miembro para que ambos estén en el mismo sistema de base 10.

$$\log_a 25 = \frac{\log 25}{\log a} \quad \text{y} \quad \log_b 4 = \frac{\log 4}{\log b}$$

Luego $\log_a 25 = \log_b 4 \longrightarrow \dfrac{\log 25}{\log a} = \dfrac{\log 4}{\log b} \longrightarrow \log a.\log 4 = \log b.\log 25$

El nuevo sistema nos queda constituido así:

$$\begin{cases} \log a.\log 4 = \log b.\log 25 \text{ ....(III)} \\ a \,.\, b = 10000 \text{ ....(IV)} \end{cases}$$

Despejando a de la ecuación (IV) nos queda que $a = 10000/b$......(V)

Sustituyendo éste valor en (III) nos queda que:

$$\log\left(\frac{10000}{b}\right).\log 4 = \log b \ \log 25$$

$(\log 10000 - \log b)\log 4 = \log b.\log 25$ (Aplicando logaritmo de un cociente)

$(4 - \log b)\log 4 = \log b \ . \ \log 25$ ($\log 10000 = 4$)

$4\log 4 - \log 4 \ . \ \log b = \log b \ . \ \log 25$ (Propiedad distributiva)

$4\log 4 = \log b \ . \ \log 25 + \log 4 \ . \ \log b$ (Aislando los términos donde está b)

$4\log 4 = \log b\,(\log 25 + \log 4)$ (Tomando log b factor común)

$$\log b = \frac{4\log 4}{\log 25 + \log 4}$$ (Despejando log b)

$$\log b = \frac{4\log 4}{\log 25.4}$$ (logaritmo de un producto en el denominador)

$$\log b = \frac{4\log 4}{\log 100} = \frac{4\log 4}{2}$$ ($\log 100 = 2$)

$\log b = 2\log 4$ (Simplificando por 2)

$\log b = \log 4^2$ (logaritmo de una potencia en el segundo miembro)

$b = 4^2$ (Porque si $\log x = \log y$ entonces $x = y$. Propiedad 4)

$b = 16$

Sustituyendo $b = 16$ en la expresión (IV) nos queda que $a = \dfrac{1000}{16}$ → **a = 625**

Luego $\boxed{a = 625 \qquad b = 16}$

Ejemplo 7

Resolver el sistema siguiente: $\begin{cases} 2^{x+y} = 4^{x-y} \\ 3^{x.y} = 531.441 \end{cases}$

En estas ecuaciones es necesario lograr que las potencias sean de la misma base, pudiéndose escribir así:

$\begin{cases} 2^{x+y} = 2^{2(x-y)} \\ 3^{x.y} = 3^{12} \end{cases}$ Igualando exponentes $\begin{cases} x + y = 2x - 2y \\ x . y = 12 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x . y = 12 \end{cases}$

Sustituyendo el valor de $x = 3y$ en la segunda ecuación se obtiene que:

$3y^2 = 12$, de donde $y^2 = 4 \longrightarrow y = \pm 2$

Sustituyendo los valores de y en la ecuación $x = 3y$ se tiene que:

Si $y = 2 \longrightarrow x = 6$; Si $y = -2 \longrightarrow x = -6$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

Resolver cada uno de los sistemas de ecuaciones:

1) $\begin{cases} m + n = 22 \\ \log m - \log n = 1 \end{cases}$

R: $m = 20$ $n = 2$

2) $\begin{cases} \log k + \log n = 3 \\ \log k - \log n = 1 \end{cases}$

R: $k = 100$ $n = 10$

3) $\begin{cases} 2 \log t - 1 = 5 \log k \\ \log t + 2\log k = 5 \end{cases}$

R: $t = 1000$ $k = 10$

4) $\begin{cases} 3^{a+b} = 27 \\ 2a - 3 = b \end{cases}$

R: $a = 2$ $b = 1$

5) $\begin{cases} m - n = 30 \\ \log m + \log n - 3 = 0 \end{cases}$

R: $m = 50$ $n = 20$

6) $\begin{cases} \sqrt[m]{m+n} = 3 \\ (m+n).2^m = 36 \end{cases}$

R: $m = 2$ $n = 7$

7) $\begin{cases} 3 \log b = 12 - 2\log a \\ \log a - \log b = 1 \end{cases}$

R: $a = 1000$ $b = 100$

8) $\begin{cases} k - 14t = 4 \\ \log(2k) - \log(3t) = 1 \end{cases}$

R: $k = 60$ $t = 4$

9) $\begin{cases} \log a^2 + \log b^2 = 2 \\ a^2 + b^2 = 15 \end{cases}$

R: $a = 2\sqrt{5}$ $b = -2\sqrt{5}$

10) $\begin{cases} b^a = 16 \\ b^{(a+1)(a-1)} = 64 \end{cases}$

R: $a = 2$ $b = 4$
$a = -1/2$ $b = 1/256$
ver sugerencia al final

11) $\begin{cases} m + n = 110 \\ \log m + \log n = 3 \end{cases}$

R: $m = 10$ $n = 100$

12) $\begin{cases} \log m + 2\log n = 5 \\ 2\log m - 5\log n = 1 \end{cases}$

R: $m = 1000$ $n = 10$

13) $\begin{cases} \log_x 3 = \log_y 2 \\ x - y = 10 \end{cases}$

R: $x = 4,1$ $y = 2,4$
Ver sugerencia al final

14) $\begin{cases} \log_3 (m + n) = 5 \\ -m + n = 43 \end{cases}$

R: $m = 100$ $n = 143$

15) $\begin{cases} \log_5 m + n = 7 \\ m^n = 5^{12} \end{cases}$

Ver sugerencia al final
R: $m = 625$ $n = 4$
$m = 125$ $n = 3$

16) $\begin{cases} \dfrac{2^{k+n}}{2^{k-n}} = 10 \\ \log(k^2 - n^2) = 1 \end{cases}$

Ver sugerencia al final

R: k = 11/2 n = 9/2

17) $\begin{cases} 2^m + 3^n = 41 \\ \log m + \log n = 1 \end{cases}$

R: m = 5 n = 2

18) $\begin{cases} 9^{p+q} = 27 \\ 3^{2p+q} = 9 \end{cases}$

R: p =1/2 q = 1

19) $\begin{cases} \log_2 (m^2 + n^2) - \log_2 2 = \log_2 2 + \log_2 5 \\ \log_2 (m + n) - \log_2 (m - n) = \log_2 3 \end{cases}$ **R: m = 4 n = 2**

20) $\begin{cases} \log p + 2\log q = 2 \\ p - 3q^2 = 5 \end{cases}$

R: p = 20 $q = \sqrt{5}$

P = 20 $q = -\sqrt{5}$

21) $\begin{cases} \log (x + y) + \log (x - y) = \log 13 \\ \ln e^x = \ln e^{y+1} \end{cases}$

22) $\begin{cases} \log x + \log (y + 3) = \log 6 \\ \log(x + 7) - \log(y + 2) = 1 \end{cases}$

R: x = 3 y = - 1

23) En la función $f(x) = k \cdot a^x$ calcular el valor de k y a si se cumple:

a) f(3) = 6 y f(8) = 192

b) f(-1) = 1/6 y f(- 3/2) = 1/18

R: a = 2 k = 3/4

SUGERENCIAS

Sugerencia para el ejercicio 15: aplicar en ambos miembros de la segunda ecuación $\log_5$.

Sugerencia para ejercicio 13: hacer un cambio de base en la primera ecuación.

Recuerda que 1 = log 10; 2 = log 100 3 = log 1000

Sugerencia para ejercicio 16

Recuerda que $k^2 - n^2 = (k + n)(k - n)$

Sugerencia para ejercicio 10

Descomponer los números en potencias de base 2 y aplicar las propiedades de los logaritmos. Luego se dividen miembro a miembro la segunda ecuación entre la primera.

3.8 Aplicaciones de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

En la expresión $500 = 250e^{-0,8t}$ despejar t.

$$\frac{500}{250} = \frac{250e^{-0,8t}}{250}$$ (Dividiendo ambos miembros entre 250)

$$2 = e^{0,8t}$$

$$\ln 2 = \ln e^{-0,8t}$$ (Aplicando logaritmo natural a ambos miembros)

$$\ln 2 = -0,8\,t$$ (Porque $\ln e^x = x$. Propiedad de logaritmos naturales)

$$t = \frac{\ln 2}{-0{,}8} \quad \text{(Despejando t)}$$

$$t = \frac{0{,}6931472}{-0{,}8} \quad \text{(Obteniendo ln 2 en la calculadora)}$$

$$\mathbf{t = -0{,}3465736}$$

Ejemplo Se tienen 200 gramos de una sustancia radiactiva que decae a razón de 4% por hora.

a) ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que sólo queden 150 gramos de sustancia radiactiva?.

b) ¿En cuánto tiempo permanecerán sólo 50 gramos de sustancia radiactiva?

c) Calcular el tiempo que tarda la cantidad inicial de esta sustancia radiactiva en decaer a la mitad de su cantidad. A ese tiempo transcurrido se le da el nombre de *vida media* de la sustancia.

Solución

Antes hemos estudiado que el modelo de decaimiento exponencial viene dado por la expresión siguiente: $A = A_0e^{-rt}$

A_0: representa la cantidad presente

A: representa la cantidad presente después de transcurrido un tiempo t

r: representa la razón de decrecimiento por unidad de tiempo con $r > 0$

Para tratar de calcular el tiempo transcurrido en el cual decaen 200 gramos hasta 150 gramos consideramos en la expresión A = 200 y A_0 = 150 y tratamos de despejar t. Recuérdese que la tasa de decrecimiento de 4% debe ser convertida a su forma decimal, por lo que r = 0,04.

Sustituyendo A, A_0 y r la ecuación del decaimiento exponencial inicial se transforma en:

$$150 = 200\, e^{-0{,}04t} \quad \text{(Ecuación inicial)}$$

$$\frac{150}{200} = e^{-0{,}04t} \quad \text{(Dividiendo ambos miembros entre 200)}$$

$$0{,}75 = e^{-0{,}04t} \quad \text{(Dividiendo 150 entre 200)}$$

$$\ln 0{,}75 = \ln e^{-0{,}04t} \quad \text{(Aplicando logaritmo natural a ambos miembros)}$$

$$\ln 0{,}75 = -0{,}04t \quad \text{(Aplicando la propiedad } \ln e^x = x\text{)}$$

$$t = \frac{\ln 0{,}75}{-0{,}04} = \frac{-0{,}287682}{-0{,}04} = 7{,}19$$

$$\mathbf{t = 7{,}19 \text{ horas}}$$

Se tarda 7,19 horas en decaer desde 200 gramos hasta 150 gramos.

Resuelve las partes b y c

Ejemplo 3

En un laboratorio de Bioanálisis se tiene que inicialmente en un cultivo existen 2000 bacterias. Sabiendo, que el número de ellas se duplica cada hora, la cantidad de bacterias después de transcurridas t horas es posible determinarlo a través de la fórmula $N = 2000(2)^t$, donde N representa el número final de bacterias.

¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que el cultivo crezca hasta 30.000 bacterias?.

Solución

De acuerdo con la expresión se tendrá que:

$$N = 2.000(2)^t$$

$$30.000 = 2.000(2)^t \quad \text{(Sustituyendo por N = 30.000)}$$

$$\log 30.000 = \log[2000(2)^t] \quad \text{(logaritmo a ambos miembros de la igualdad anterior)}$$

$$\log 30.000 = \log 2000 + \log 2^t \quad \text{(logaritmo de un producto en el segundo miembro)}$$

$$\log 30.000 = \log 2000 + t \log 2 \quad \text{(logaritmo de una potencia en el segundo término)}$$

$$\log 30.000 - \log 2000 = t \log 2 \quad \text{(Aislando el término que contiene t)}$$

$$t = \frac{\log 30.000 - \log 2000}{\log 2} \quad \text{(Despejando t)}$$

$$t = \frac{4{,}4771 - 3{,}1030}{0{,}3010} \quad \text{(Obteniendo los logaritmos con la calculadora)}$$

$$t = 3{,}90 \text{ horas}$$

Esto indica que en 3,90 horas el cultivo tendrá 30.000 bacterias.

Cálculos para el Interés Simple y el interés compuesto

En las finanzas, los bancos usan las fórmulas del interés simple y del interés compuesto para calcular el interés generado en las libretas y cuentas en general.

La fórmula del *interés compuesto* viene dado por la expresión siguiente:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

P: cantidad de dinero invertido
A: cantidad de dinero existente después de transcurridos t años
r : tasa anual
n: número de veces anual

Si la composición es trimestral será n = 4 (porque serían 4 veces al año).

Si la composición es mensual será n = 12 (porque serían 12 veces al año).

Si la composición es diaria será n = 365 (porque serían los 365 días del año).

Si la composición es semestral n = 2 (porque serían 2 veces al año).

Recordemos que si la tasa está dada en forma de porcentaje debe convertirse a su forma decimal, dividiéndose entre 100. Si es el 6% se transforma en 0,08, si es el 1,2% se transforma en 0,012.

Ejemplo 4 Se tiene inicialmente un capital de 100.000 Bs colocados al 8% compuestos diariamente. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que el capital se duplique?.

Solución

Si utilizamos la fórmula expuesta anteriormente debemos sustituir por los siguientes valores P = 200.000, A = 100.000, r = 0,08 y n = 365

$$200.000 = 100.000\left(1+\frac{0,08}{365}\right)^{365t}$$

$2 = 1,00021918^{365t}$ (Dividiendo ambos miembros entre 100.000)

$\log 2 = 365t \log 1,00021918$ (Aplicando logaritmo a ambos miembros)

$$t = \frac{\log 2}{365\log 1,00021918} \Longrightarrow t = 8,68$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

Resuelve cada uno de los problemas que se te presentan a continuación

1. En la expresión $P = P_0\, e^{kt}$ despejar t.
2. En la expresión $P = 150e^{kt}$ despejar t.
3. En la expresión $A = A_0e^{kt}$ despejar k.
4. En la expresión $\ln y - \ln x = 2,3$ despejar y.

5 .La intensidad de luz que pasa a través de cierto medio está determinada por la fórmula siguiente: $x = k(\ln I_0 - \ln I)$. Despejar I_0 de la ecuación

6. La expresión para estudiar la acción de una molécula de proteína es $\ln M = \ln Q - \ln (1 - Q)$.

Despejar Q de dicha expresión.

7. Los bancos proporcionan créditos con interés compuesto sobre una base continua, donde la cantidad P existente en la cuenta en cualquier instante t puede ser calculado a través de la expresión del crecimiento exponencial $P = P_0e^{kt}$, siendo P_0 el capital invertido inicialmente y k la tasa de interés. Calcular cuánto tiempo tarda la cuenta en duplicar su valor si la tasa está al 20% y se invirtieron inicialmente 10.000 Bs.

8. La fórmula estimada para vender el número N de unidades de un cierto producto particular viene dada por la expresión $N = 400 + \ln a$, siendo a la cantidad de dinero invertido en promoción para el el producto. a) Si se han invertido 1.500.000 Bs en propaganda, ¿cuáles han de ser las cantidades de venta esperada? b) ¿Cuánto dinero se debe invertir en propaganda para alcanzar la venta de 1600 cantidades del producto?

9. Se tiene un cultivo cuya cantidad inicial de bacterias es 4500, determinar ¿en qué momento el número de bacterias del cultivo será de 50.000.? La expresión es $N = 4.500(2)^t$

10. La cantidad, A, de 200 gramos de cierto material radiactivo que se conserva después de t años se puede determinar usando la expresión $A = 200(0,800)^t$. ¿Cuándo quedarán 40 gramos?.

11. Haz uso de la fórmula del interés compuesto analizada previamente al ejemplo 4 y resuelve el siguiente problema:

Si se invierten 300.000 Bs al 6% compuestos diariamente, calcular ¿cuánto tiempo tardará la cuenta en duplicarse?

12. Si 80 gramos de una sustancia radiactiva tarda 100 años en decaer hasta 60 gramos, ¿cuánto tiempo tardará una cantidad de esta sustancia en decaer hasta su quinta parte. Recuerda la ecuación de decaimiento exponencial.

13. En química se ha definido el pH (potencial de hidrógeno) de una solución con la expresión siguiente: pH = - log[H_3O^+] donde [H_3O^+] representa la concentración del ion de hidronio en la solución (medido en moles por litro). El pH es una medida de la acidez o alcalinidad de la solución. El agua, que es natural, tiene un pH = 7. Las soluciones por debajo de 7 son ácidas, mientras que aquellas por encima de 7 son alcalinas. ¿Cuál es el pH de un jugo de naranja si su concentración de ion de hidronio es $6{,}82.10^{-5}$?. ¿Cuál es la concentración de ion de hidronio en una solución con un pH = 9,1?.

Respuestas

1) $t = \dfrac{\ln P - \ln P_o}{k}$ **2)** $t = \dfrac{\ln P - \ln 150}{4}$ **3)** $k = \dfrac{\ln A - \ln A_o}{t}$ **4)** $y = xe^{2,3}$

5) $I_o = I\,e^{x/k}$ **6)** $Q = \dfrac{M}{1+M}$ **7)** 3,5 años **8)** a) 3.955 b) 121,5

9) 3,47 horas **10)** 7,21 años

11) 11,55 **12)** 559 años **13)** 4,2 $7{,}9.10^{-10}$

Actividades complementarias

1. Demostrar la siguiente igualdad: $\log_a (p^2 - q^2) = \log_a (p - q) + \log_a (p + q)$.

2. Establece en cada caso la expresión de x correspondiente:

a) $\log_4 x = 3 \log_4 a + 2 \log_4 b - \dfrac{\log_4 c + \log_4 d}{3}$ b) $\ln x = 3 \ln a + 2 \ln b - 1/2 \ln c$

c) $\log x = \dfrac{1}{5}(3\log a - 2\log b) - 7(\log c + 4 \log d)$

R: a) $x = \dfrac{a^3b^2}{\sqrt[3]{cd}}$ b) $x = \dfrac{a^3b^2}{\sqrt{c}}$ c) $x = \dfrac{\left(\frac{a^3}{b^2}\right)}{(c.b^4)^7}$

3. Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $(a^{x-3})^x = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-2x}$ b) $\sqrt{\sqrt{7} + 6\sqrt{7}} = 49^{\frac{x}{2}}$ c) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-x}$

R: a) $x = 5$ b) $x = 3/4$ c) $x = 31/16$

4. Hallar la expresión de log x que corresponde a cada una de las igualdades siguientes:

a) $x = \left(\dfrac{3a^2b}{c^3d}\right)^2$ b) $x = \dfrac{a^3b^4c^{\frac{1}{6}}}{m^{\frac{2}{3}}n\sqrt{p}}$ c) $x = \sqrt[4]{\dfrac{a(b+c)}{d^5}}$

5. Sabiendo que log 2 = m, expresa en función de m:

a) log 1600 b) $\log \sqrt[5]{0{,}0002}$ c) $\log \left(\dfrac{1}{1{,}28}\right)^{-3}$

R: a) log 1600 = 6m b) $\log \log \sqrt[5]{0{,}0002} = -2m$ c) $\log \left(\dfrac{1}{1{,}28}\right)^{-3} = 21m - 6$

6. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3^{2x-1} - 3^x = 18$ b) $2.3^{2x-1} = 1 - 3^{x-1}$ c) $\sqrt{4^{-2x+6}} = \dfrac{1}{8}$ d) $25 . 5^{x+1} = \dfrac{1}{125}$

R: a) $x = 2$ b) $x = 0$ c) $x = 6$ d) $x = -6$

7. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\log 4 - 2 \log 5 + \log(x + 1) - \dfrac{1}{3}\log 8 = 1$ b) $\log x^3 - \log \dfrac{7x+8}{2} = \log 2x$

c) $\log(x + \sqrt{6}) + \log(x - \sqrt{6}) = 1$ d) $(x - 1)\log 2 + \log 8 = \log 4$

R: a) $x = 124$ b) $x = 8$ c) $x = \dfrac{11}{9}\sqrt{6}$ d) $x = 0$

8. Resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3^{2x} . 3^{-y} = 81 \\ \log x + \log (y + 12) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{3^{x-y}} = 81 \\ 5x + 2y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 3 \log x - 2 \log y = 3 \end{cases}$

R: $x = 1$ $y = -2$ **R:** $x = 3$, $y = -5$ **R:** $x = 10$; $y = 1$

LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Historia de los logaritmos

Henry Briggs y **John Napier**, éste último llamado también Neper - de ahí el nombre de neperianos dado a los logaritmos - fueron quienes dieron inicio al uso de los logaritmos. Respecto al primero, su nombre fue usado para denominar a los logaritmos decimales o de Briggs.

Neper fue un matemático escocés (1550-1617) nacido en Merchiston Castle, cerca de Edimburgo quien fue educado en St Andrews para luego continuar sus estudios en los Países Bajos, Francia e Italia.

Tuvo una destacada actuación debido a su teoría sobre los logaritmos, método éste que fue capaz de reemplazar procedimientos aritméticos de los que había dependido hasta esa época la resolución de los más sencillos problemas trigonométricos. También, entre otras obras, se dedicó a trabajos de trigonometría esférica y las conocidas fórmulas que llevan su nombre dan la expresión de los ángulos de un triángulo esférico, en función de la amplitud de los lados y pueden ser calculados a través de logaritmos.

Haciendo uso de las propiedades de los logaritmos fue como se construyó una sencilla máquina de calcular llamada regla de cálculo, la cual fue reemplazada posteriormente por la calculadora de bolsillo, debido a su gran versatilidad.

En ella se usaba el logaritmo de un producto como la suma de los logaritmos de los factores y el logaritmo de un cociente como la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor.

¿Qué es la escala de Richter?

Es la escala utilizada para medir las magnitudes de los terremotos en función de la amplitud de las ondas superficiales.

Fue el investigador C. Richter (1900-1985) quien la introdujo en 1935, definiendo la magnitud **M** de un terremoto en función de la amplitud **A** de sus ondas superficiales así:

$\mathbf{M} = \log \mathbf{A} + C.$

C representa una constante que depende de dos factores: el período T de las ondas registradas en el sismógrafo y de la distancia D de éste al epicentro, en grados, siendo

$C = 3,3 + 1,66 \log D - \log T$

La magnitud M es una medida logarítmica

Supóngase que tenemos dos sismos cuyas magnitudes son $M_1 = 6$ y otro de magnitud $M_2 = 8$.

En el primer caso $\log A_1 + C = 6$, y en el otro $\log A_2 + C = 8$.

Restando se tiene que:

$\log A_2 - \log A_1 = 2$

$\log(A_2 / A_1) = 2$, de donde

$A_2 = 100\ A_1$

Es decir el segundo es 100 veces más intenso que el primero

3.- Determine el número N, redondeando a tres dígitos significativos.

a) log N = 2,0000 b) log N = 3,8202 c) log N = -3,104 d) log N = -1,06

e) log N = -0,3936 f) log N = 1,9330 g) log N = 1,4143 h) log N = -0,5902

Respuestas

a) 100 **b)** 6610 **c)** 0,000787 **d)** 0,0871 **e)** 0,404 **f)** 85,7 **g)** 13,900 **h)** 0,257

4.- Usa tu calculadora para determinar los valores de los logaritmos naturales (neperianos) Redondea a cuatro cifras decimales.

a) ln 50 b) ln 302 c) ln 0,0038 d) ln 120 e) ln 2,25 f) ln 45,37 g) ln 40 h) ln 2700

Respuestas

a) 3,9120 **b)** 5,7104 **c)** –5,5726 **d)** 4,7875 **e)** 0,8109 **f)** 3,8149 **g)** 3,6889 **h)** 7,9010

5.- Determinar el valor de N. Redondear los valores a tres dígitos significativos

a) ln N = 1,6 b) ln N = -2,63 c) ln N = 0,632

d) ln N = 4,96 e) ln N = 3,81 f) ln N = 2,995

Respuestas

a) 4,95 **b)** 0,0721 **c)** 1,88 **d)** 142 **e)** 45,1 **f)** 2

Cálculo logarítmico. Logaritmo de una expresión numérica

Aplicando las propiedades de los logaritmos y haciendo uso de la calculadora desarrollemos las siguientes expresiones numéricas:

1.- $\log \sqrt[3]{\dfrac{2^2\sqrt{6}}{5^2}}$

$$= \frac{1}{3}\left[\log \frac{2^2.\sqrt{6}}{5^2}\right]$$ (aplicando logaritmo de una raiz)

$$= \frac{1}{3}\left[\log 2^2 + \log\sqrt{6} - \log 5^2\right]$$ (logaritmos de una suma y de un cociente)

$$= \frac{1}{3}\left[2\log 2 + \frac{\log 6}{2} - 2\log 5\right]$$ (logaritmos de una potencia y una raíz)

$$= \frac{1}{3}\left[2.0,3010 + \frac{0,7782}{2} - 2.0,6989\right]$$ (sustituyendo por los logaritmos de los números)

$$= \frac{1}{3}\left[0,602 + 0,3891 - 1,3978\right] = \frac{1}{3}.(-0,4067)$$

$= -0,1356$

2. $\log\left[\dfrac{7.2^2.\sqrt[3]{85}}{\sqrt{26}}\right]^3$

$= 3\log\dfrac{7.2^2\sqrt[3]{85}}{\sqrt{26}}$ (logaritmo de una potencia)

$= 3[\log(7.\ 2^2\ \sqrt[3]{85}) - \log\sqrt{26}\ ]$ (logaritmo de un cociente)

$= 3\ [\log 7 + \log 2^2 + \log\sqrt[3]{85} - \log\sqrt{26}\ ]$ (logaritmo de un producto)

$= 3\ [\log 7 + 2\log 2 + \log\ \sqrt[3]{85} - \log\sqrt{26}\ ]$ (logaritmo de una potencia)

$= 3\ [\log 7 + 2\log 2 + \dfrac{1}{3}\log 85 - \dfrac{1}{2}\log 26\ ]$ (logaritmo de una raíz)

$= 3\log 7 + 6\log 2 + \log 85 - \dfrac{3}{2}\log 26$ (propiedad distributiva)

$= 3.\ 0{,}8451 + 6.\ 0{,}3010 + 1{,}9294 - \dfrac{3}{2}.\ 1{,}4150$

$= 2{,}5353 + 1{,}806 + 1{,}9294 - 2{,}1225$

$= 4{,}1482$

Luego se tendrá que: $\log\left(\dfrac{7.2^2.\sqrt[3]{85}}{\sqrt{26}}\right)^3 = 4{,}11482$

El cálculo logarítmico. Antilogaritmo

Antes hemos analizado que es posible, dado el logaritmo de un número, obtener el número.
Si usamos correctamente la calculadora obtenemos que:

Si $\log N = 3{,}440909$ entonces $N = 2759$
Si $\log N = 2{,}547774$ entonces $N = 352{,}9 \approx 353$
Si $\log X = 1{,}9294419$ entonces $X = 85$
Si $\log X = -3{,}096991$ entonces $X = 0{,}008$

A esto es necesario agregar que es posible calcular el valor numérico de una expresión aplicando las propiedades de los logaritmos y finalmente buscar el antilogaritmo.

Ejemplo

Calcular por logaritmos la siguiente expresión $\dfrac{\sqrt{32{,}14}\,.\sqrt[3]{59{,}3}}{\sqrt[4]{317{,}6}}$

Solución Llamemos $x = \dfrac{\sqrt{32{,}14}\,.\sqrt[3]{59{,}3}}{\sqrt[4]{317{,}6}}$

Si aplicamos logaritmo de base 10 a ambos miembros de la igualdad se tendrá que:

$$\log x = \log \frac{\sqrt{32{,}14}\,.\sqrt[3]{59{,}3}}{\sqrt[4]{317{,}6}}$$

$\log x = \log\left[\sqrt{32{,}14}\,.\sqrt[3]{59{,}3}\right] - \log \sqrt[4]{317{,}6}$ (aplicando logaritmo de un cociente)

$\log x = \log\sqrt{32{,}14} + \log\sqrt[3]{59{,}3} - \log\sqrt[4]{317{,}6}$ (aplicando logaritmo de un producto)

$\log x = \dfrac{\log 32{,}14}{2} + \dfrac{\log 59{,}3}{3} - \dfrac{\log 317{,}6}{4}$ (aplicando logaritmo de una raíz)

$\log x = \dfrac{1{,}5070459}{2} + \dfrac{1{,}7730547}{3} - \dfrac{2{,}5018805}{4}$ (buscando los logaritmos en la calculadora)

$\log x = 0{,}7535229 + 0{,}5910182 - 0{,}6254701$ (efectuando los cocientes correspondientes)

$\log x = 0{,}7190709$

$x = 5{,}2369$ (buscando antilogaritmo)

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.- Usa tu calculadora, y las propiedades de los logaritmos, para calcular cada uno de los siguientes valores

a) $\log\dfrac{144}{49}$ b) $\log 2^3\,5^2$ c) $\ln\dfrac{2^3.5}{\sqrt{2}}$ d) $\log 7{,}514\sqrt[3]{83{,}49}$ e) $\ln\sqrt{\dfrac{40.562}{0{,}046}}$

f) $\log\left[\dfrac{\sqrt[3]{2}\,..\sqrt{5}}{0{,}8}\right]^3$ g) $\ln\dfrac{\sqrt[3]{25}\,..\sqrt{14}}{\sqrt[5]{48}}$ h) $\log\dfrac{\sqrt{0{,}028}\,.(\sqrt{1{,}25}\,)^3}{0{,}0075}$

Respuestas:

a) 0,4682 **b)** 2,301 **c)** 3,3423 **d)** 1,5164 **e)** 6,5497 **f)** 1,6401 **g)** 2,5393 **h)** 1,4939

2.- Calcular por logaritmos las siguientes expresiones (es necesario obtener el resultado buscando el antilogaritmo)

a) $\left[\sqrt[3]{27\sqrt{83}}\right]^2$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{48}\,.\,108^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{6}}$ c) $\dfrac{7,8371^3}{518,74\sqrt{0,9176}}$ d) $\dfrac{\sqrt{32,14}\,.\sqrt[3]{59,3}}{\sqrt[4]{317,6}}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{(834,5)^2.(0,07456)^3}{(0,00875243)^4.(952,4)^2}}$ f) $\dfrac{5,25\sqrt[5]{2,25}}{(3,5)^3.\sqrt{450}}$ g) $1,45\,.\,\dfrac{\sqrt[3]{16}}{5}.(0,26)^3$

h) $\sqrt{\dfrac{(7,8)^2.0,508}{2,4\,.\,0,70\,.\,0,9344}}$ i) $\sqrt[3]{\dfrac{5\,.\sqrt{0,02}\,.(0,03)^2}{0,04\,.\,11\,.\sqrt{0,05}}}$ j) $\left[\sqrt[3]{\dfrac{8,2\,.(4,5)^3}{3,8\,.\,7,3}}\right]^4$

Respuestas

a) 39,26 **b)** 10,0908 **c)** 0,9687 **d)** 5,2369 **e)** 37,8506 **f)**0,0679 **g)** 0,0128

h) 2,1432 **i)** 0,1863 **j)** 80,7470

3.- Dados log 4 = 0,6021; log 7 = 0,8451; log 5 = 0,6990 y log 9 = 0,9542, haz uso de éstos valores y las propiedades de los logaritmos para calcular cada uno de los logaritmos siguientes sin usar la calculadora. **Sugerencia:** descomponer los números en sus factores primos. En caso de decimales escribirlos como una fracción que tenga como denominador la unidad seguida de ceros.

a) log 28 b) $\log\dfrac{63}{4}$ c) log 112 d) log 2,25 e) log 252 f) log 49

g) $\log\dfrac{144}{49}$ h) $\log\dfrac{324}{63}$ i) log 400 j) log 400 k) $\log\sqrt{500}$

Respuestas

a) 1,4472 **b)** 1,1972 **c)** 2,0493 **d)** 0,3521 **e)** 2,4014 **f)** 1,6902

g) 0,4682 **i)** 2,6020 **j)** 2,6021 **k)** 1,3495

4.- Dados log 2 = 0,3010; log 3 = 0,4771; log 7 = 0,8451 utilizar las propiedades de los logaritmos sin usar la calculadora para determinar los valores de los siguientes logaritmos:

a) log 5 b) log 2100 c) $\log\sqrt[3]{4,2}$ d) $\log 4,9^3$ e) $\log\sqrt[3]{10,5}$ f) $\log\dfrac{\sqrt[5]{49}}{36^2}$

Respuestas: **a)** 0,6990 **b)** 3,3222 **c)** 0,2077 **d)** 2,0706 **e)** 0,3404 **f)** –2,7744

5. Sin usar la calculadora, y aplicando la definición de logaritmo, determinar:

a) log 1 b) log 10 c) log 0,1 d) log 0,01 e) log $\sqrt{10}$ f) log $\sqrt{0{,}01}$ g) log $\sqrt{100}$

Respuestas
a) 0 b) 1 c) – 1 d) – 2 e) 0,5 f) – 1 g) 1

6. Usa la calculadora y obtiene el valor de x en cada caso. Aplica las propiedades de los logaritmos.

a) $10^x = 0{,}0001$ **b)** $2{,}15 = 4^x$ **c)** $3{,}25^x = 10$ **d)** $4{,}18 = 0{,}01^x$ **e)** $2^{-x} = 85^x$ **f)** $\log 216 = x$
R: x = -4 **R:** x = 0,552 **R:** x = 1,953 **R** : x = - 0,3105 **R:** X = 0 **R:** x = 3

3.4 La fórmula del cambio de base

Si se conoce el logaritmo de un número x en una base a ($\log_a x$), podemos conocer su logaritmo con alguna otra base b ($\log_b x$) a través de una fórmula llamada **la fórmula del cambio de base**. Esto se hace porque un logaritmo con una base distinta de 10 o de e, no puede ser evaluada directamente con la calculadora.

Tratemos de deducir la fórmula que nos permitirá hacer dicho cambio de base.

Para ello partimos de la expresión siguiente:

$$\log_b x = y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I})$$

Si escribimos la expresión anterior en forma exponencial nos queda que:

$$b^y = x$$

$$\log_a b^y = \log_a x \text{ (aplicando } \log_a \text{ en ambos miembros)}$$

$$y \log_a b = \log_a x \text{ (aplicando en el primer miembro logaritmo de una potencia)}$$

$$y = \frac{\log_a x}{\log_a b} \text{ (dividiendo ambos miembros por } \log_a b)$$

Sustituyendo y, de la última expresión, en (I) nos queda que:

$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$$

Si conocemos los logaritmos en una determinada base a (a = 10) es posible calcular el logaritmo de x con una nueva base b.

Nótese que "dividimos el logaritmo base a de x entre el logaritmo base a de b"

En el caso de los logaritmos naturales o neperianos es posible utilizar el mismo procedimiento Así por ejemplo, si deseamos evaluar ln 20 ($\log_e 20$), se puede sustituir la a por e y la x por 20 en la fórmula siguiente:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

$$\log_e 20 = \frac{\log 20}{\log e} \approx \frac{1,3010}{0,4343} \approx 2,9956$$

Entonces ln 20 = 2,9956.

Si buscamos ln 20 en una calculadora encontraremos un valor muy cercano.

Para hacer una evaluación de los logaritmos naturales usando los logaritmos comunes utilizaremos la fórmula siguiente:

$$\boxed{\ln x = \frac{\log x}{0,4343}}$$

Ejemplo 1

Utilizar la fórmula del cambio de base para determinar $\log_3 24$

$$\log_3 24 = \frac{\log 24}{\log 3} = \frac{1,3802}{0,4771} \approx 2,8929$$

Luego $\log_3 24 = 2,8929$

Ejemplo 2

Emplear la fórmula del cambio de base para encontrar $\log_2 5$

$$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{0,69897}{0,3010} \approx 2,3213$$

Luego $\log_2 5 = 2,3213$

Ejemplo 3

Encontrar el ln 82

$$\textbf{Ln 82} = \frac{\log 85}{\log e} = \frac{1,9294}{0,4343} \approx \mathbf{4,4426}$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.- Usa la fórmula del cambio de base para calcular los logaritmos. Expresa las respuestas con cuatro decimales..

a) $\log_3 7$ b) $\log_3 8$ c) $\log_{1/3} 3$ d) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{5}$ e) $\log_7 4$ f) $\log_{1/2} 5$

g) $\log_9 \frac{2}{3}$ h) $\log_2 20$ i) $\log_3 0,0049$ j) $\log_5 0,463$ k) ln 20 ℓ) ln 0,046

m) ln 27000

Respuestas

a) 1,7712 **b)** 1,8928 **c)** –1,0000 **d)** 2,3219 **e)** 0,71 **f)** –2,32 **g)** –0,18

h) 4,3219 **i)** –4,8411 **j)** –0,4784 **k)** 3,6889 **ℓ)** –3,0791 **m)** 7,9010

3.5 *Resolución de ecuaciones logarítmicas*

Cuando se determina el logaritmo de una expresión, dicha expresión recibe el nombre de **argumento** del logaritmo.

Así, por ejemplo, $\log_5 8$ se dice que 8 es el argumento y en la expresión $\log_{10}(3x + 2)$ se tendrá que $(3x + 2)$ es el argumento.

Si el argumento contiene una variable, se supondrá que el argumento representa un valor positivo.

Debemos recordar que **solamente existen logaritmos de números positivos.**

Una ecuación logarítmica es aquella en la cual la variable o incógnita está localizada dentro del argumento del logaritmo o como base de un logaritmo.

Para resolver una ecuación logarítmica se aplican las propiedades de los logaritmos y se escribe la ecuación dada en la forma $\log A = \log B$. De ésta ecuación se pasa luego a la ecuación algebraica $A = B$ por ser inyectiva la función logarítmica.

Recordemos algunas **propiedades** que nos ayudarán a resolver ecuaciones logarítmicas:

1.- Si $x = y$, entonces $a^x = a^y$
2.- Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$
3.- Si $x = y$, entonces $\log x = \log y$ $(x > 0, y > 0)$
4.- Si $\log x = \log y$, entonces $x = y$ $(x > 0, y > 0)$
5.- Si $\log_a b = x$ entonces $a^x = b$
6.- $\log a.b = \log a + \log b$ (logaritmo de un producto)
7.- $\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$ (logaritmo de un cociente)
8.- $\log a^n = n \log a$ (logaritmo de una potencia)
9.- $\log \sqrt[n]{a} = \dfrac{\log a}{n}$ (logaritmo de una raíz)
10.- Si $\ln x = k$ entonces $e^k = x$

La resolución de ecuaciones logarítmicas exige convertirlas en otras en la que no aparezca la función logarítmica. Esto es posible hacerse de una de estas dos formas:

- Transformar la ecuación en otra de la forma $\log A = \log B$, lográndose que $A = B$, y resolver esta última ecuación.
- Transformar la ecuación logarítmica en otra de la forma $\log_a x = M$, que equivale a $x = a^M$, y resolver ésta ecuación.

Ejemplo 1 Resolver la ecuación $\log_{10}(h + 3) = 2$

$h + 3 = 10^2$ (escribiendo la igualdad en forma exponencial)

$h + 3 = 100$

$h = 100 - 3$ (despejando h)

$h = 97$

Como el dominio de una función logarítmica está restringido con el fin de obtener logaritmos de números positivos, es necesario verificar cualquier solución posible en la ecuación dada.

En este caso para el valor de x encontrado se tendrá que $\log_{10} 100 = 2$, lo cual es cierto.

Ejemplo 2 Resolver $\log_2(p + 4) - \log_2(p - 3) = 3$

$\log_2 \frac{p+4}{p-3} = 3$ (aplicando en el primer miembro el logaritmo de un cociente. Propiedad 7)

$\frac{p+4}{p-3} = 2^3$ (escribiendo la igualdad en forma exponencial)

Si resolvemos la ecuación nos queda que:

$p + 4 = 8(p - 3)$

$p + 4 = 8p - 24$

$p - 8p = -24 - 4$

$-7p = -28$

$p = 4$

Para verificarla sustituimos $p = 4$ en el miembro de la izquierda de la ecuación original, quedándonos que:

$\log_2 8 - \log_2 1$

$3 - 0$ (porque $\log_2 8 = 3$ y $\log_2 1 = 0$)

3

Esto indica que la igualdad se verifica para $p = 4$. Luego $p = 4$ es la solución.

Ejemplo 3 Resolver la ecuación $\log_2(n + 1)^3 = 4$

$(n + 1)^3 = 2^4$ (escribiendo la ecuación en forma exponencial)

$(n + 1)^3 = 16$ (desarrollando 2^4)

$n + 1 = \sqrt[3]{16}$ (Extrayendo raíz cúbica a ambos miembros)

$n = \sqrt[3]{16} - 1$ (despejando n)

$n = 2\sqrt[3]{2} - 1$ (porque $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$)

Verificación

Para hacer la verificación sustituimos $n = 2\sqrt[3]{2} - 1$ en la ecuación inicial, quedándonos que:

$\log_2 (2\sqrt[3]{2} - 1 - 1)^3 = \log_2(2\sqrt[3]{2})^3 = \log_2(8.2) = \log_2 16 = 4.$

Aquí también se verifica la igualdad, indicándonos que el valor $n = 2\sqrt[3]{2} - 1$ es el correcto.

Ejemplo 4 Resolver la ecuación $\log x + \log (x - 3) = 1$

$\log x + \log (x - 3) = 1$ (escribiendo la ecuación original)

$\log x (x - 3) = 1$ (aplicando logaritmo de un producto)

$\log x (x - 3) = \log 10$ (porque $\log 10 = 1$)

$x(x - 3) = 10$ (porque si $\log x = \log y$ entonces $x = y$. Propiedad 4)

$x^2 - 3x = 10$ (aplicando propiedad distributiva)

$x^2 - 3x - 10 = 0$ (igualando a cero)

$(x - 5)(x + 2) = 0$ (factorizando)

$x + 2 = 0$ o $x - 5 = 0 \Longrightarrow x = -2$ o $x = 5$

Verificación

$X = -2$ no es una solución porque al reemplazar x por -2 se obtiene el logaritmo de un número negativo, lo cual no es posible.

Sustituyamos por $x = 5$ en la expresión logarítmica original

$\log x + \log (x - 3) = 1$

$\log 5 + \log (5 - 3) = 1$ (sustituyendo por $x = 5$)

$\log 5 + \log 2 = 1$

$\log 5.2 = 1$ (aplicando logaritmo de un producto)

$\log 10 = 1$

$1 = 1$ ($\log 10 = 1$)

Esto indica que $x = 5$ sí satisface la ecuación y como consecuencia será una solución.

Ejemplo 5

Despejar x de la igualdad siguiente: $\log_b(8-x) - \log_b(2-x) = \log_b 3$

$\log_b(8-x) - \log_b(2-x) = \log_b 3$

$\log_b \frac{8-x}{2-x} = \log_b 3$ (aplicando logaritmo de un cociente en el primer miembro)

$\frac{8-x}{2-x} = 3$ (Si log x = log y entonces x = y. Propiedad 4)

$8 - x = 3(2-x)$ (multiplicando por $(2-x)$ en ambos miembros)

$8 - x = 6 - 3x$ (aplicando propiedad distributiva)

$-x + 3x = 6 - 8 \longrightarrow 2x = -2 \longrightarrow x = -1$

Observemos, que aun cuando x = -1 es un valor negativo, es una solución viable.

Verificación de que x = -1 es la solución. Para ello sustituimos por x = -1 en la ecuación original

$$\log_b[8-(-1)] - \log_b[2-(-1)] = \log_b 3$$
$$\log_b 9 - \log_b 3 = \log_b 3$$
$$\log_b \frac{9}{3} = \log_b 3$$

Ejemplo 6

Resolver la siguiente ecuación logarítmica $\log_b(3x+2) - \log_b(2x-3) = 0$

$\log_b(3x+2) - \log_b(2x-3) = 0$

$\log_b \frac{3x+2}{2x-3} = 0$ (aplicando logaritmo de un cociente en el primer miembro)

$\log_b \frac{3x+2}{2x-3} = \log_b 1$ (porque $\log_b 0 = 1$)

$\frac{3x+2}{2x-3} = 1$ (si log x = log y entonces x = y. Propiedad 4)

$3x + 2 = 2x - 3$ (multiplicando ambos miembros por $2x - 3$)

$3x - 2x = -3 - 2$ (agrupando la variable en el primer miembro)

$x = -5$

Verificación: $\log_b(3x+2) - \log_b(2x-3) = 0$

$\log_b[-15+2] - \log_b[-10-3] = 0$

$\log_b[-13] - \log_b[-13] = 0$

Como el logaritmo de un número negativo no existe, debemos descartar la solución x = - 5. La ecuación no tiene solución.

Ejemplo 7 Resolver la ecuación logarítmica $\log \dfrac{1}{2t+3} = -2$

Sabemos que $\log 10^{-2} = -2 \log \dfrac{1}{27+3} = -2$

Sustituyendo en la ecuación $-2 = \log 10^{-2}$ nos queda que:

$$\log \frac{1}{2t+3} = \log 10^{-2} \Longrightarrow \frac{1}{2t+3} = 10^{-2}$$ (si log x = log y entonces x = y)

$$\frac{1}{2t+3} = \frac{1}{100}$$ (porque $10^{-2} = 1/100$)

$2t + 3 = 100$

$2t = 100 - 3 \Longrightarrow 2t = 97 \Longrightarrow t = 97/2$

Al verificar encontramos que se cumple para el valor $x = 97/2$

Ejemplo 8

Resolver la ecuación $\log(x^{\log x}) - \log x - 6 = 0$

$\log(x^{\log x}) - \log x - 6 = 0$

$\log x . \log x - \log x - 6 = 0$ (aplicando logaritmo de una potencia)

$(\log x)^2 - \log x - 6 = 0$ $[\log x . \log x = \log^2 x = (\log x)^2]$

Hagamos un cambio de variable haciendo $\log x = U$, quedándonos que:

$U^2 - U - 6 = 0$

$(U - 3)(U + 2) = 0$ (factorizando)

$U - 3 = 0$ o $U + 2 = 0 \Longrightarrow U = 3$ o $U = -2$

Si sustituimos en la expresión $\log x = U$ nos queda que $\log x = 3$ o $\log x = -2$

Si $\log x = 3$	Si $\log x = -2$
$x = 10^3$	$x = 10^{-2}$
$x = 1000$	$x = 0{,}01$

Ejemplo 9

Resolver $\log\sqrt{x+14}+\log\sqrt{x+7}-\log 1{,}2=1$

$\log\sqrt{x+14}+\log\sqrt{x+7}-\log 1{,}2=1$ (escribiendo la ecuación original)

$\log\sqrt{x+14}+\log\sqrt{x+7}-\log 1{,}2=\log 10$ (porque log 10 = 1)

$\log(\sqrt{x+14}\,.\,\sqrt{x+7})-\log 1{,}2=\log 10$ (aplicando logaritmo de un producto)

$$\log\frac{\sqrt{x+14}\,.\,\sqrt{x+7}}{1{,}2}=\log 10$$ (aplicando logaritmo de un cociente)

$$\frac{\sqrt{x+14}\,.\,\sqrt{x+7}}{1{,}2}=10$$ (propiedad 4. Si log x = log y entonces x = y)

$\sqrt{x+14}\,.\sqrt{x+7}=1{,}2.10$ (multiplicando ambos miembros por 1,2)

$\sqrt{x+14}\,.\sqrt{x+7}=12$

$(x+14).(x+7)=144$ (elevando ambos miembros al cuadrado)

$x^2+21x+98-144=0$ (desarrollando el paréntesis e igualando a cero)

$x^2+21x-46=0$

$(x+23)(x-2)=0$ (factorizando)

$x+23=0$ ó $x-2=0 \Longrightarrow x=-23$ ó $x=2$

Si hacemos la verificación para ambos valores encontramos que la solución es $x = 2$

Ejemplo 10

Resolver la ecuación $\ln(x+1)-\ln x=2$

Para resolver la ecuación $\ln(x+1)-\ln x=2$, debemos aplicar las propiedades de los logaritmos, pudiéndose escribir:

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=2$$

Esta expresión es equivalente a $e^2=\dfrac{x+1}{x}$

Por tanto $x\,.\,e^2=x+1$

Agrupando x en el primer miembro y sacando factor común nos queda que:

$$x(e^2-1)=1 \text{ de donde } x=\frac{1}{e^2-1}$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones logarítmicas. En caso de no tener soluciones reales indíquelo.

1) $\log_3 4 + \log_3 x = 2$ 2) $2\log_5 t = \log_5 49$ 3) $\log_2 t - \log_2 (t-2) = 3$

4) $\log 8 + \log x + \log x^2 = 3$ 5) $\log_9 (2x+7) - \log_9 (x-1) = \log_9 (x-7)$

6) $\log_4 x - \log_4 (x-4) = \log_4 (x-6)$ 7) $\frac{1}{2}\log_3 x = \log_3(x-6)$ 8) $\log_4 (k+1)^3 = 3$

9) $\log (2x-3)^3 = 3$ 10) $\log\frac{2-5x}{2(x+8)} = 0$ (sugerencia: hacer $0 = \log 1$)

11) $\frac{\log(5x-6)}{\log x} = 2$ $(x \neq 1)$ 12) $\frac{\log(3x-4)}{\log x} = 2$ 13) $\frac{\log(5x+6)}{2} = \log x$

14) $\log_2 k + \log_2 (6-k) = 3$ (sugerencia: escríbase $3 = \log_2 2^3$)

15) $\log_2 \sqrt{t+2} - 1 = \log_2 \sqrt{t-1}$ 16) $9\log_9 x - \log_3^2 x = 2$

17) $\log(7x-9)^2 + \log(3x-4)^2 = 2$ (Sugerencia: escríbase $1 = \log_2 2$)

18) $\log x = 2 + \frac{1}{2}(\log 18 + \log 8 - 2\log 5)$ 19) $\log\sqrt{t+14} + \log\sqrt{t+7} = \log 1{,}2 + 1$

20) $\frac{\log(35-t^3)}{\log(5-t)} = 3$ 21) $\log(8^{\log x}) - \log(2^{\log x}) = \log x^x$ 22) $\ln (x+1) - \ln x = 1$

23) $10^{\ln x} = 5$ 24) $2x \ln x - 3x = 0$ 25) $\log\sqrt{x+1} - \log\sqrt{x} = \log 1000$

en el ejercicio 16 hacer uso de la fórmula del cambio de base para transformar $\log_9 x$ en $\log_3 x$ y luego hacer un cambio de variable llamando $\log_3 x = k$.

Respuestas

1) $x = 9/4$ **2)** $t = 7$ **3)** $t = 16/7$ **4)** $x = 5$ **5)** $x = 10$ **6)** $x = 8$ **7)** $x = 9$ **8)** $k = 3$

9) $x = 13/2$ **10)** $x = -2$ **11)** $x = 3,\ x = 2$ **12)** no hay solución **13)** $x = 6$

14) $k = 4;\ k = 2$

15) $t = 2$ **16)** $x = 81$ $x = \sqrt{3}$ **17)** $x = 2$ o $x = 13/21$ **18)** $x = 48$ **19)** $t = 2$

20) $x = 3$ o $x = 2$ **21)** $x = 1$ o $x = 0{,}6020$ **22)** $x = \frac{1}{e-1}$ **23)** $x = e^{\log 5}$

24) $x = \sqrt{e^3}$

3.6 Resolución de ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es aquella que contiene una variable como uno de sus exponentes.

Veamos la resolución de algunas ecuaciones exponenciales:

Ejemplo 1 Resolver $3^{x^2-4x+4}=1$

La idea central es tratar de que ambos miembros de la igualdad puedan ser expresados como potencias de la misma base, para luego resolverla por simple igualación de bases.

$3^{x^2-4x+4}=1$

$3^{x^2-4x+4}=3^0$ (haciendo $1 = 3^0$)

$x^2-4x+4=0$ (porque si $a^r = a^s$ entonces $r = s$)

$(x-2)^2=0$ (factorizando)

$x-2=0$ (extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad)

$x=2$

Ejemplo 2 Resolver $\sqrt{2^{n+5}}=\sqrt[3]{4^{n+2}}$

Aquí deben expresarse las raíces como exponente fraccionario y luego expresar como potencias iguales de la misma base.

$\sqrt{2^{n+5}}=\sqrt[3]{4^{n+2}}$

Escribiendo las raíces en forma de exponente fraccionario se tiene que:

$$2^{\frac{n+5}{2}}=4^{\frac{n+2}{3}}$$

Si escribimos 4 como 2^2 en el segundo miembro nos queda que:

$$2^{\frac{n+5}{2}}=2^{\frac{2n+4}{3}}$$

$\dfrac{n+5}{2}=\dfrac{2n+4}{3}$ (igualando exponentes)

$3(n+5)=2(2n+4)$ (Eliminando denominadores)

$3n+15=4n+8$ (Aplicando propiedad distributiva)

$3n-4n=8-15$ (Agrupando la variable n en el primer miembro)

$-n=-7$

$n=7$

Ejemplo 3   Resolver $4^{k} - 2^{k+1} = 35$

En esta ecuación generalmente se hace un cambio de variable que conducirá a una ecuación de segundo grado.

$4^{k} - 2^{k+1} = 35$ (escribiendo la ecuación original)

$2^{2k} - 2^{k+1} = 35$ (porque $4^{k} = 2^{2k}$)

$(2^{k})^{2} - 2^{k}.2 = 35$ $[\text{Haciendo } 2^{2k} = (2^{k})^{2} \text{ y } 2^{k+1} = 2^{k}.2]$

Hacemos un cambio de variable y llamemos $2^{K} = U$, pudiéndose escribir que:

$U^{2} - 2U = 35$, de donde $U^{2} - 2U - 35 = 0 \longrightarrow (U - 7)(U + 5) = 0$

$\longrightarrow U - 7 = 0$ o $U + 5 = 0$

$U - 7 = 0 \longrightarrow$ **$U = 7$** $U + 5 = 0 \longrightarrow$ **$U = -5$**

Sustituyendo $U = 7$ en $2^{k} = U$ nos queda que $2^{k} = 7$

$$2^{k} = 7$$

Debemos resolver la ecuación exponencial, que como observamos no tienen la misma base, por lo que debemos aplicar logaritmo a ambos miembros de la igualdad:

$K \log 2 = \log 7$ (aplicando logaritmo de una potencia)

$$k = \frac{\log 7}{\log 2} \longrightarrow \mathbf{k = 2{,}8074}$$

El valor $U = -5$ sustituido en $2^{k} = U$ nos da $2^{k} = -5$, indicándonos que no es posible, puesto que $2^{k} > 0$ siempre.

Ejemplo 4   Resolver $3^{n} - 3^{n+1} - 3^{n+2} + 3^{n+3} = 144$

En este caso se tiene una ecuación exponencial que posee términos semejantes.

Debemos tratar de descomponer las potencias de tal forma que tomemos un factor común.

Veamos:

$3^{n} - 3^{n+1} - 3^{n+2} + 3^{n+3} = 144$

$3^{n} - 3^{n}.3 - 3^{n}.3^{2} + 3^{n}.3^{3} = 144$ (Descomponiendo en producto de potencias de igual base)

$3^{n} - 3^{n}.3 - 9.3^{n} + 27.3^{n} = 144$ (Desarrollando $3^{2} = 9$; y $3^{3} = 27$)

$3^{n}(1 - 3 - 9 + 27) = 144$ (Tomando 3^{n} factor común)

$3^{n}.16 = 144$

$3^{n} = \frac{144}{16} = 9$ (Despejando 3^{n})

$3^{n} = 9 \Longrightarrow 3^{n} = 3^{2} \Longrightarrow$ **$n = 2$**

Ejemplo 5

Resolver $7^{x-1}.4^{x+3} = 3^{2x}.\,5^{3x-1}$

Nótese que no es posible expresar ambos miembros como potencias de la misma base.

Por esta razón debemos aplicar logaritmos a ambos miembros de la igualdad

$\log 7^{x-1}.4^{x+3} = \log 3^{2x}.\,5^{3x-1}$

Si aplicamos logaritmos a ambos miembros de la igualdad tenemos:

$(x-1)\log 7 + (x+3)\log 4 = 2x\log 3 + (3x-1)\log 5$

$x\log 7 - \log 7 + x\log 4 + 3\log 4 = 2x\log 3 + 3x\log 5 - \log 5$ (Propiedad distributiva)

$x\log 7 + x\log 4 - 2x\log 3 - 3x\log 5 = \log 7 - 3\log 4 - \log 5$ (agrupando términos)

$x(\log 7 + \log 4 - 2\log 3 - 3\log 5) = \log 7 - 3\log 4 - \log 5$ (Tomando x factor común)

$$x = \frac{\log 7 - 3\log 4 - \log 5}{\log 7 + \log 4 - 2\log 3 - 3\log 5} \quad \text{(Despejando x)}$$

Si usamos una calculadora para obtener los logaritmos de los números y efectuamos operaciones obtenemos que:

$x = 1{,}03$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

Resolver cada una de las ecuaciones exponenciales:

1) $2^{x^2+2x} = \frac{1}{2}$ **2)** $2^{x-3} = 8^{x+1}$ **3)** $4^{x+2} - 4^{x} = 15$ **4)** $5^{2t} - 3.5^{t} + 2 = 0$

5) $\sqrt{a^{5-k}} = a^{3-k}$ **6)** $\sqrt[t-1]{a^{5-t}} = \sqrt[t+1]{a^{2t+5}}$ **7)** $2^{t} + 2^{t-1} + 2^{t-2} = 7$

8) $2^{k-1} + \frac{1}{2^{k-3}} = 5$ **9)** $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$ **10)** $4^{x} + 2^{x+1} - 80 = 0$

11) $\sqrt[3]{2^{2k+1}} = \frac{1}{32}$ **12)** $3^{2k+1} = 2.5^{k+2}$ **13)** $-2^{t+1} + 4^{t} = 35$ **14)** $9^{k} + 3^{k} - 12$

15) $2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} + 2^{n+4} = 120$ **16)** $\frac{\sqrt[3]{2^{2t+1}}}{\sqrt[5]{4^{2t-3}}} = 2$ **17)** $7^{k-6} = 3^{k-2}.5^{k}$

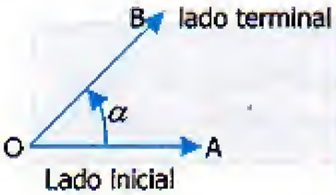
18) $\sqrt[5]{9^{k-2}} = 3^{2k-1}$ **19)** $0{,}2^{2x-5} - 0{,}0016 = 0$ **20)** $2^{h+1}.3^{3h+2} = 4^{4h+3}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

4.1 Definiciones previas

La trigonometría es la rama de la matemática que estudia las relaciones numéricas entre los lados y los ángulos de los triángulos.

Un ángulo es la porción del plano limitada por dos semirrectas que poseen un origen común



El origen O es el vértice del ángulo y las semirrectas OA y OB son los lados del ángulo.

OA es el lado inicial   OB es el lado terminal

El ángulo AOB = α se genera mediante la rotación del lado OA hasta el lado OB.

Los ángulos pueden denotarse con letras del alfabeto griego: α, β, δ, ϕ, γ, λ, θ

También puede denotarse $\angle AOB$, que se lee como ángulo AOB.

Un ángulo es positivo si OA se rota en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj hasta OB. Figura 4.1(a)

Un ángulo es negativo si OA se rota en el mismo sentido del giro de las manecillas del reloj hasta OB. Figura 4.1(b)

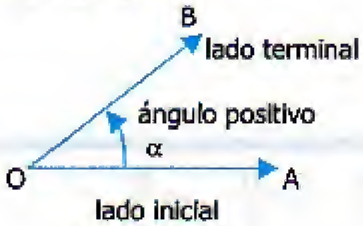


Figura 4.1 (a)

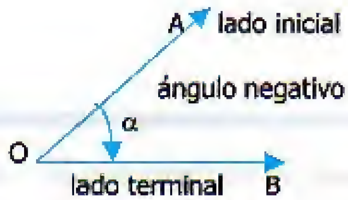


figura 4.1(b)

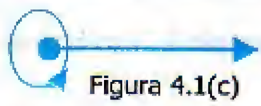


Figura 4.1(c)

Si la rotación es completa, en el sentido contrario a las manecillas del reloj, se tendrá un ángulo cuya medida será de 360°, con los lados inicial y final coincidiendo. Figura 4.1(c)

4.2 El ángulo y su medida

Cuando medimos un ángulo lo que realmente hacemos es ver qué parte de la rotación total ha recorrido el lado terminal. *Mientras mayor sea el recorrido del lado terminal, mayor ha de ser el ángulo.*

Las medidas de los ángulos pueden ser expresadas en el *sistema centesimal*, el *sistema sexagesimal* y el *sistema radián.*

El sistema centesimal, es 1/400 parte del ángulo completo.

El sistema sexagesimal es aquél en el cual el círculo se fragmenta en 360 divisiones llamadas grados. Estos, a su vez, se subdividen en 60 minutos y cada uno de éstos en 60 segundos, lo cual indica que usando este sistema un ángulo puede ser expresado en grados, minutos y segundos.

El sistema radián, llamado también *sistema circular*, es aquél en el cual el círculo se fragmenta en 2π radianes.

Un radián es el ángulo central de una circunferencia al que le corresponde un arco de longitud igual al radio

Para hacer una conversión entre grado sexagesimal y el radián bastará con recordar que 360° de un círculo equivalen a 2π radianes, lo cual es equivalente a decir que:

$$180^\circ = \pi \text{ radianes de donde} \quad 1 \text{ Radián} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

En general decimos:

Para convertir de **grados a radianes** multiplicamos el valor del ángulo en grados por $\pi/180^\circ$

Para convertir de **radianes a grados** se multiplica el valor del ángulo en radianes por $180^\circ/\pi$

Ejemplo1 Expresar en radianes los siguientes ángulos: a) 120° b) 135° c) 270°

$$120^\circ = 120^\circ . \frac{\Pi}{180^\circ} = \frac{120^\circ \Pi}{180^\circ} = \frac{2}{3}\Pi \text{ radianes}$$

$$135^\circ = 135^\circ . \frac{\Pi}{180^\circ} = \frac{135^\circ}{180^\circ}\Pi = \frac{3}{4}\Pi \text{ radianes}$$

$$270^\circ = 270^\circ . \frac{\Pi}{180^\circ} = \frac{270^\circ}{180^\circ}\Pi = \frac{3}{2}\Pi$$

Ejemplo 2 Expresar en grados los siguientes ángulos: a) $\frac{\Pi}{4}$ b) $\frac{2\Pi}{3}$ c) $\frac{3\Pi}{5}$

a) $\frac{\Pi}{4} = \frac{\Pi}{4} . \frac{180^\circ}{\Pi} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$

b) $\frac{2\Pi}{3} = \frac{2\Pi}{3} . \frac{180^\circ}{\Pi} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

c) $\frac{3}{5}\Pi = \frac{3}{5}\Pi . \frac{180^\circ}{\Pi} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$

Tabla mostrando las medidas correspondientes en grados y radianes de algunos ángulos

grados	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
radianes	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Convierte en grados cada ángulo dado:

a) $\pi/6$ b) $\pi/3$ c) $-5\pi/2$ d) $11\pi/6$ e) $3\pi/2$ f) $\pi/4$ g) $2\pi/3$ h) $11\pi/6$ i) $-\pi/2$

2. Convierte en radianes cada ángulo dado:

a) 150° b) -120° c) 18° d) -40° e) 210° f) 60°

g) 135° h) 210° i) -150° j) 20° k) 450° ℓ) -75°

Respuestas

1) a) 30° **b)** 60° **c)** -450° **d)** 330° **e)** 270° **f)** 45° **g)** 120° **h)** 330° **i)** -90°

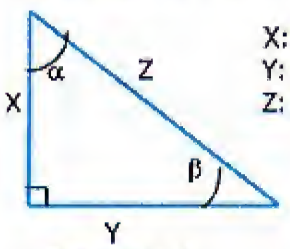
2) a) $5\pi/6$ **b)** $-2\pi/3$ **c)** $\pi/10$ **d)** $-2\pi/9$ **e)** $7\pi/6$ **f)** $\pi/3$ **g)** $3\pi/4$ **h)** $7\pi/6$

i) $-5\pi/6$ **j)** $\pi/9$ **k)** $5\pi/2$ **ℓ)** $-5\pi/12$

4.3 Los triángulos especiales.

Durante el estudio de la trigonometría haremos uso de algunos triángulos especiales, relacionándolos con sus ángulos. Como dijimos antes, **la trigonometría** es la rama de la matemática que estudia las relaciones numéricas entre los lados y los ángulos de los triángulos.

Un triángulo rectángulo se caracteriza por que tiene un ángulo recto, donde los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos* y el lado opuesto al ángulo recto recibe el nombre de *hipotenusa*. Este es el lado de mayor longitud de los tres.



X: cateto
Y: cateto
Z: hipotenusa

Figura 4.2 (a)

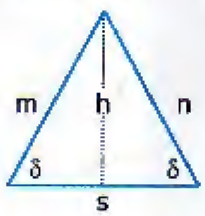


Figura 4.2 (b)

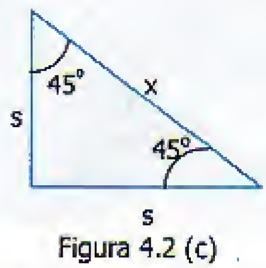


Figura 4.2 (c)

El *teorema de Pitágoras,* aplicado a un triángulo rectángulo, dice así:

En un triangulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos

De acuerdo con el enunciado y observando la figura 4.2 (a) podemos escribir la relación así:

$$Z^2 = X^2 + Y^2 \longrightarrow \boxed{Z = \sqrt{X^2 + Y^2}}$$

En todo triángulo rectángulo sus angulos agudos suman 90°. Esto se puede traducir diciendo que los ángulos α y β en el triángulo rectángulo son **ángulos complementarios**, pudiéndose escribir:

$$\boxed{\alpha + \beta = 90^0}$$

Un triángulo isósceles se caracteriza porque tiene dos lados iguales, tal como el mostrado en la figura 4.2 (b). Los lados m y n son de igual longitud y s lado de longitud diferente a m y n.

Nótese, que los ángulos (δ) en los vértices de la base son iguales.

En el triágulo isósceles la altura h es *mediana* y *mediatriz*. Ella divide a la base s en dos partes iguales.

Un triangulo rectángulo isósceles se carateriza por que los ángulos iguales miden 45° cada uno, tal como se muestra en la figura 4.2 (c)

Si se aplica el teorema de Pitágoras al triangulo 4.2 (c) se tendrá que:

$$x^2 = s^2 + s^2 \longrightarrow x^2 = 2s^2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{2s^2} \longrightarrow x = s\sqrt{2}$$

La solución negativa se rechaza porque no existen longitudes negativas. Luego la hipotenusa será de longitud $x = s\sqrt{2}$

Un triángulo equilátero se carateriza porque sus tres lados tienen la misma longitud

La figura 4.3 muestra un triángulo cuyos tres lados son iguales (equilátero). El triángulo ACB es un triángulo rectángulo cuyo lado AC = h/2 y el lado AB = h.

Aplicando Pitágoras en el triángulo ACB se tiene que: $h^2 = (h/2)^2 + x^2$ de donde

$$x^2 = h^2 - (h/2)^2 = h^2 - \frac{h^2}{4} = \frac{4h^2 - h^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{3h^2}{4} \text{ de donde } x = \frac{h}{2}\sqrt{3}$$

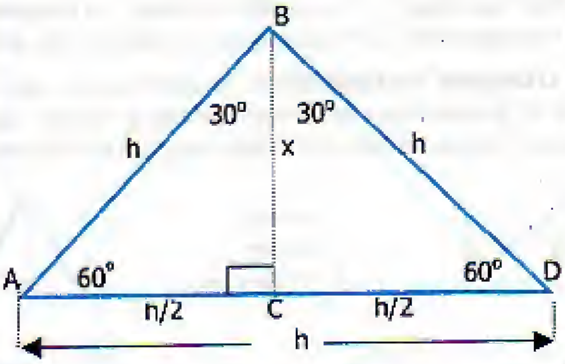


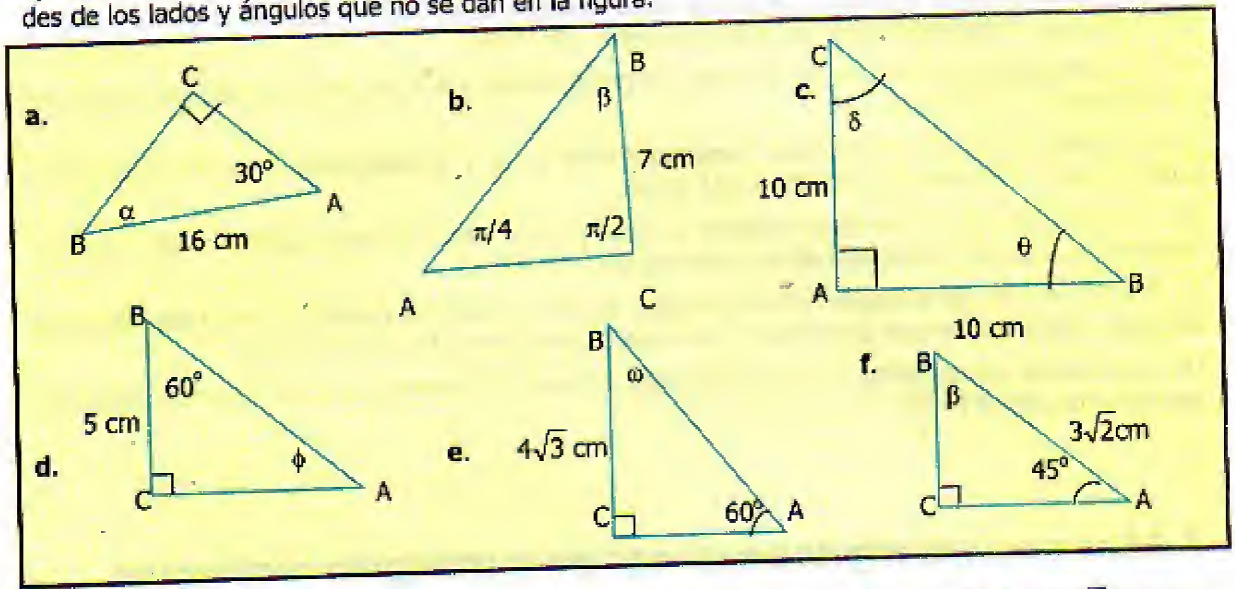
Figura 4.3

El triángulo equilátero ADB consta de dos triángulos rectángulos (ACB y DCB).

Podemos decir que **en el triángulo rectángulo 30° - 60°** el lado opuesto al ángulo de 30° es la mitad de la hipotenusa, y el lado opuesto al ángulo de 60° (en este caso x) mide la mitad de la hipotenusa multiplicado por $\sqrt{3}$.

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1) Usa las relaciones deducidas anteriormente en el triángulo 30° - 60° para encontrar las longitudes de los lados y ángulos que no se dan en la figura.



R: a) $\alpha=60°$ BC = 8 cm AC = $8\sqrt{3}$ **b)** $\beta = 45°$ AB $=7\sqrt{2}$ cm **c)** $\delta = \theta = 45°$ BC $=10\sqrt{2}$ cm

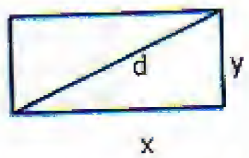
d) $\phi = 30°$ AB = 10 cm AC = $5\sqrt{3}$ cm **e)** $\omega=30°$ AB = 8 cm AC = 4 cm

f) $\beta=45°$ AC=BC=3 cm

2) Usa el teorema de Pitágoras y calcula la diagonal de los rectángulos cuyos lados miden:

a) y = 3 cm x= 4 cm b) y = 21 cm x = 28 cm

c) y = 12cm x = 15 cm d) y = 6 cm x = 8 cm



R: a) 5 cm **b)** 35 cm **c)** $3\sqrt{41}$ cm **d)** 10 cm

3) Se tiene un triángulo isósceles cuya base mide 6 cm y los lados iguales miden 5 cm. Calcular la altura sobre el lado distinto. Recuerdemos que un *triángulo isósceles* queda dividido en dos triángulos rectángulos iguales al trazar la altura correspondiente al lado desigual. **R:** 4 cm

4) Calcular los lados de un cuadrado sabiendo que la diagonal mide 24 cm. Recordemos que un cuadrado queda dividido en dos triángulos rectángulos iguales al trazar una de sus diagonales.

R: $12\sqrt{2}$ cm

5) Un cuadrado está inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio. Calcular los lados del cuadrado. **R:** $20\sqrt{2}$ cm.

6) Una vara de madera tiene 30 m de altura y está elevada sobre un terreno plano. Si ella, por fecto del viento, se rompe en un punto su extremo toca el suelo a 16 m del pie. ¿A qué altura se ha roto? **R:** 161/15 m

7) Un albañil apoya una escalera de 5 m contra un muro vertical. El pie de la escalera está a 2 m del muro. Calcula un valor aproximado de la altura a la que se encuentra la parte superior de la escalera. **R: 7)** $\sqrt{21}$m

8) Se tienen dos torres, una de 30 m y otra de 40 m de altura repectivamente, separadas entre si 50 m. Si desde el extremo superior de cada una se coloca una cuerda hasta un punto entre las bases de las torres, ¿En qué punto entre las bases deben atarse las cuerdas para que éstas posean igual longitud?. **R:** 32 m y 18 m

9) Se tiene un trapecio isósceles (tiene dos lados iguales) cuyos lados miden 14 cm, 5 cm, 6 cm y 5 cm. Calcular la distancia entre los lados paralelos. **R:** 3 cm

10) Un paralelepípedo tiene 16 cm de largo, 12 cm de ancho y 4,5 cm de altura.Calcular el valor de una diagonal. **R:** 20,5 cm.

11) El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 11 m y la hipotenusa 1 m más que el otro cateto.Hallar la longitud del otro cateto. **R:** 60 m.

12) El perímetro de un triángulo isósceles es 160 cm y la altura correspondiente al lado desigual mide 40 cm. Calcular la lóngitud de los lados iguales. **R:** 60 cm.

13. El perímetro de un triángulo rectángulo mide 36 cm y uno de los catetos 12 cm. Hallar los lados restantes. Recordemos que *el perímetro es la suma de los lados* **R:** 15 cm y 9 cm.

14. El perímetro de un triángulo rectángulo mide 70 cm. Si la hipotenusa mide 29 cm, ¿cuánto miden los otros lados? **R:** 20 cm y 21 cm.

4.4 Las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

Aquí analizaremos la trigonometría de un triángulo rectángulo general, es decir, triángulos que no sean el triángulo rectángulo isósceles, ni el triángulo rectángulo de 30° - 60°.

El proceso que utilizaremos sólo puede ser aplicado a los **ángulos agudos**, es decir, ángulos comprendidos 0 y $\pi/2$.

Consideremos el triángulo rectángulo de referencia, el cual es visto desde la perspectiva del ángulo agudo α ($\alpha < 90°$). . Figuras 4.4 y 4.5

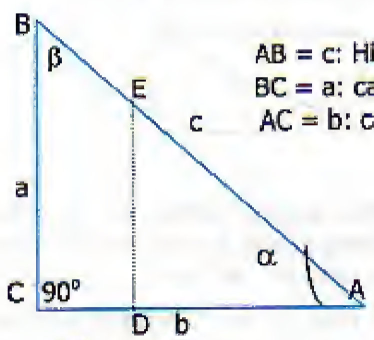


Figura 4.4

AB = c: Hipotenusa
BC = a: cateto opuesto al ángulo α
AC = b: cateto adyacente al ángulo α

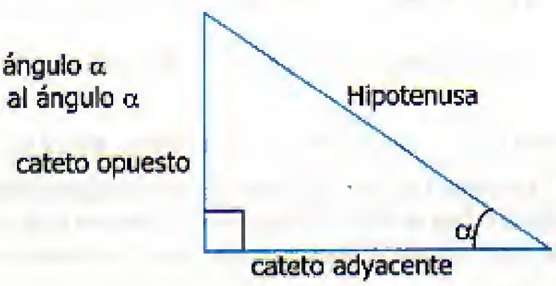


Figura 4.5

Tomando en consideración el triángulo ABC y el ángulo agudo α pueden definirse las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo así:

Se llama **seno de** α a la razón entre el cateto opuesto BC y la hipotenusa AB:

$$\text{sen } \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \longrightarrow \boxed{\text{sen } \alpha = \frac{a}{c}}$$

Se llama **coseno de** α a la razón entre el cateto adayacente AC y la hipotenusa AB

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \longrightarrow \boxed{\cos \alpha = \frac{b}{c}}$$

Se llama **tangente de** α a la razón entre el cateto opuesto BC y el cateto adyacente AC.

$$\text{tg } \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \longrightarrow \boxed{\text{tag } \alpha = \frac{a}{b}}$$

Observación: si las longitudes de los lados del triángulo son proporcionales a otro triángulo con el mismo ángulo α, es importante reconocer que las razones sen α, cos α y tag α son características de un ángulo α, y no dependen de las longitudes de sus lados. ¿Qué significa esto?. Veamos:

Los tríangulos ACB y ADE semejantes, razón ésta que es corroborada por dos criterios vistos en geometría que dicen:

- Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo igual.
- Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen los catetos proporcionales.

Esto verifica que los lados homólogos son proporcionales, pudiéndose escribir que:

$$\frac{BC}{BA} = \frac{ED}{EA} = \ldots\ldots = \text{sen } \alpha \qquad \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \ldots\ldots = \cos \alpha \qquad \frac{BC}{CA} = \frac{ED}{AD} = \ldots\ldots = \text{tg } \alpha$$

Partiendo de las razones anteriores podemos definir las *razones trigonométricas recíprocas* de la manera siguiente:

Se llama **cotangente de** α a la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto:

$$\cot \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} \longrightarrow \boxed{\cot \alpha = \frac{b}{a}}$$

Esta es la recíproca de la tangente $\boxed{\cot \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}}$

Se llama **secante de** α a la razón entre la hipotenusa AB y el cateto adyacente AC

$$\sec \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} \longrightarrow \boxed{\sec \alpha = \frac{c}{b}}$$

Esta es la recíproca del coseno $\boxed{\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}}$

Se llama **cosecante de** α **(csc** α o cosec α**)** a la razón entre la hipotenusa AB y el cateto opuesto BC

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} \longrightarrow \boxed{\csc \alpha = \frac{c}{a}}$$

Esta es la recíproca del seno $\boxed{\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{1}{\csc \alpha}}$

La **secante**, la **cosecante** y la **cotangente** son denominadas *funciones trigonométrias recíprocas.*

4.5 Razones trigonométricas de ángulos complementarios

De la misma forma que hemos definido el seno y el coseno para el ángulo α, también es posible hacerlo para el ángulo β. Estos ángulos son *complementarios*, por lo que puede escribirse que $\alpha + \beta = 90^\circ$ de donde $\alpha = (90^\circ - \beta)$ o $\beta = (90^\circ - \alpha)$

Observando el triángulo de la figura 4.6 y definiendo para el ángulo β se tiene:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \text{ ....(I)}$$

$$\cos \beta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \text{ ....(II)}$$

$$\operatorname{tag} \beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{a} \text{ ....(III)}$$

Hemos visto que para el ángulo α se tiene:

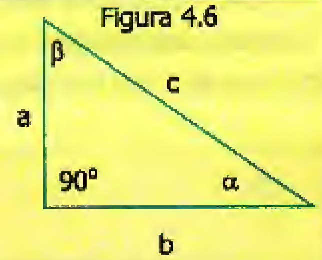
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} \text{ ....(IV)}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \text{ ....(V)}$$

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{a}{b} \text{ ....(VI)}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} \text{ ....(VI)}$$

Figura 4.6



Es importante aclarar que las razones trigonométricas son adimensionales, ya que están definidas como el cociente entre dos longitudes.

Si observamos y comparamos las relaciones (I) y (V) se tiene que $\boxed{\operatorname{sen} \beta = \cos \alpha}$

Si observamos y comparamos las relaciones (II) y (IV) se tiene que $\boxed{\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha}$

Si observamos y comparamos las relaciones (III) y (VII) se tiene que $\boxed{\operatorname{tag} \beta = \operatorname{cotg} \alpha}$

Como $\beta = (90^\circ - \alpha)$ las relaciones anteriores pueden también escribirse de la siguiente forma:

Expresados como 90°	Expresados como $\pi/2$
$\operatorname{sen}(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$	$\operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90^0 - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$	$\cos(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$
$\operatorname{tag}(90^0 - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tag}(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$

Estas relaciones también son llamadas **relaciones cofuncionales,** diciéndose que la función trigonométrica de un ángulo es igual a la co-función trigonométrica del ángulo complementario

En general podemos decir:

Si dos ángulos son complementarios , el seno de uno es igual al coseno del otro, la tangente de uno es igual a la cotangente del otro

Veamos algunos ejemplos que nos ayudarán a aclarar lo antes dicho:

1. $\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ$ **2.** $\operatorname{sen} 56^\circ = \cos 34^\circ$ **3.** $\operatorname{cotg} 34^\circ = \operatorname{tg} 56^\circ$
4. $\operatorname{tg} 78^\circ = \operatorname{cotg} 12^\circ$ **5.** $\cos 26^\circ = \operatorname{sen} 64^\circ$ **6.** $\operatorname{sen} 32^\circ = \cos(90^\circ - 32^\circ) = \cos 34^\circ$
7. $\cos 54^\circ = \operatorname{sen}(90^\circ - 54^\circ) = \operatorname{sen} 36^\circ$ **8.** $\cos\pi/3 = \operatorname{sen}(\pi/2 - \pi/3) = \operatorname{sen}\pi/6$
9. $\operatorname{tag}\pi/4 = \cot(\pi/2 - \pi/4) = \cot\pi/4$ **10.** $\operatorname{sen}\pi/5 = \cos(\pi/2 - \pi/5) = \cos 3\pi/10$

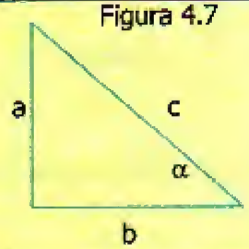
Obtengamos otra expresión para la tangente de un ángulo

Partimos de la observación del triángulo de la figura 4.7

Por definición de tangente podemos escribir:

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{a}{b}$$

Figura 4.7



Si dividimos el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número distinto de cero, ella no se altera.

Dividiendo por c nos queda que:

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \text{.........(A).}$$

También sabemos por definición que $\frac{a}{c} = \operatorname{sen}\alpha$ y $\frac{b}{c} = \cos\alpha$ .....(B)

Sustituyendo (B) en (A) nos queda que:

$$\boxed{\operatorname{tag}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} \text{ ....(C)}$$

Por otro lado como $\cot\alpha = \dfrac{1}{\text{tag}\,\alpha}$ se tendrá que $\cot\alpha = \dfrac{1}{\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

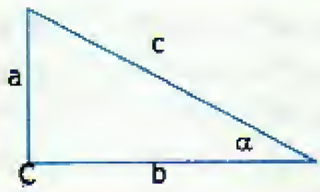
Luego nos queda que $\boxed{\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}}$ ....(D)

De acuerdo a las dos últimas relaciones (C) y (D) podemos decir:

- La tangente de un ángulo es igual al cociente entre el seno y el coseno de dicho ángulo.
- La cotangente de un ángulo es igual al cociente entre el coseno y el seno de dicho ángulo.

4.6 Identidad fundamental de la trigonometría o relación pitagórica

Consideremos el triángulo rectángulo mostrado en la figura
Apliquemos el teorema de Pitágoras a dicho triángulo:



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Si dividimos ambos miembros de la expresión anterior por c^2 se tendrá que:

$$\frac{c^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \quad \text{de donde} \quad 1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \quad \text{..............(I)}$$

Por definición sabemos que $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{a}{c} \longrightarrow \text{sen}^2\,\alpha = \dfrac{a^2}{c^2}$ ....(II)

$\cos\alpha = \dfrac{b}{c} \longrightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{b^2}{c^2}$ ....(III)

Sustituyendo (II) y (III) en (I) se obtiene que: $1 = \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha$

$$\boxed{\textbf{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

La relación anterior es conocida con el nombre de **identidad fundamental** o **relación pitagórica** e indica que:

El seno al cuadrado de un ángulo más el coseno al cuadrado del mismo ángulo es igual a la unidad

Observaciones

Puede notarse que $(\text{sen}\,\alpha)^2 = \text{sen}^2\,\alpha$ y sin embargo $\text{sen}\,\alpha^2 \neq \text{sen}^2\,\alpha$

Si en la relación deducida anteriormente ($\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$) dividimos ambos miembros entre $\text{sen}^2\,\alpha$ nos queda que:

$$\frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\text{sen}^2\,\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\,\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\,\alpha} \longrightarrow \boxed{1 + \cot^2\alpha = \text{cosec}^2\,\alpha}$$

Si repetimos el proceso y dividimos ambos miembros de la expresión $\mathbf{sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1}$ entre $\cos^2\alpha$ nos queda que:

$$\boxed{\text{tag}^2\,\alpha + 1 = \sec^2\alpha}$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

En esta actividad especial debemos recordar y adquirir destrezas en las operaciones con raíces, razón por la cual debes realizar las operaciones que se te indican.

1. Efectuar las siguientes operaciones y simplificar

a) $\sqrt{2}.\sqrt{2}$ **b)** $(3\sqrt{5})^2$ **c)** $(3\sqrt{7})(4\sqrt{7})$ **d)** $\sqrt{10}.\sqrt{15}$

e) $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{225}}$ **f)** $\sqrt{\frac{m}{(m^2+1)^2}}$ **g)** $(2\sqrt{3})^2.(3\sqrt{2})^2$ **h)** $20\sqrt{5}.\sqrt{12}$

2. Demuestra la igualdad en la expresión $\sqrt{1 - \frac{4m-1}{(2m-1)^2}} = \frac{2m}{2m-1}$

3. Demostrar la igualdad en la expresión $\sqrt{1 - \frac{4n^2}{(n^2+1)^2}} = \frac{n^2-1}{n^2+1}$

4. Racionalizar y simplificar las expresiones siguientes:

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **b)** $\frac{3}{\sqrt{8}}$ **c)** $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ **d)** $\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$ **e)** $\frac{14\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$ **f)** $\frac{8\sqrt{3}}{3\sqrt{18}}$ **g)** $\frac{14\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$

5. Efectuar y simplificar: **a)** $\sqrt{1 - \frac{(2\sqrt{2})^2}{(4\sqrt{3})^2}}$ **b)** $\sqrt{1 - \frac{(3\sqrt{3})^2}{(6\sqrt{2})^2}}$ **c)** $\sqrt{1 - \frac{(4\sqrt{5})^2}{(6\sqrt{3})^2}}$

6. Resolver y simplificar las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{160} - 4\sqrt{10}$ **b)** $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ **c)** $\frac{1}{2}\sqrt{8} - \sqrt[4]{4} - \sqrt{\frac{2}{25}}$ **d)** $4\sqrt{27} - 5\sqrt{12} + \sqrt{3}$

7. Demostrar que $2\sqrt{6}.(2\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 44\sqrt{6} - 16\sqrt{15}$

Respuestas

1) a) 2 b) 45 c) 84 d) $5\sqrt{6}$ e) $\dfrac{\sqrt{30}}{15}$ f) $\dfrac{\sqrt{m}}{m^2+1}$ g) 216 h) $40\sqrt{5}$

4) a) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ d) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ e) $\dfrac{14\sqrt{14}}{35}$ f) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ g) $\dfrac{2\sqrt{14}}{5}$

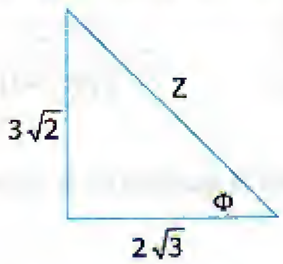
5) a) $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$ b) $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ c) $\dfrac{\sqrt{141}}{9}$ 6) a) 0 b) −1 c) $-\dfrac{1}{5}\sqrt{2}$

4.7 Cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo dada una de ellas.

Aquí veremos cómo obtener el resto de las razones partiendo del valor de una de ellas.

Ejemplo 1. En este ejemplo se conocen las longitudes de los lados del triángulo.

Dado el tríangulo de la figura, determinar los valores de las funciones trigonométricas del ángulo



Solución

Debemos calcular el valor de la hipotenusa Z aplicando el teorema de Pitágoras

$$Z^2 = (2\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 12 + 18 = 30$$

$$Z = \sqrt{30}$$

Apliquemos ahora las definiciones de las funciones trigonométricas del ángulo Φ

$$\text{sen}\ \Phi = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{30}} = \frac{3\sqrt{2}.\sqrt{30}}{\sqrt{30}.\sqrt{30}} = \frac{3\sqrt{60}}{\sqrt{30^2}} = \frac{6\sqrt{15}}{30} = \frac{\sqrt{15}}{5} \longrightarrow \boxed{\text{sen}\ \Phi = \frac{\sqrt{15}}{5}}$$

Obsérvese que debemos racionalizar los denominadores y simplificar

$$\cos\ \Phi = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{30}} = \frac{2\sqrt{3}.\sqrt{30}}{\sqrt{30}.\sqrt{30}} = \frac{2\sqrt{90}}{30} = \frac{6\sqrt{10}}{30} = \frac{\sqrt{10}}{5} \longrightarrow \boxed{\cos\ \Phi = \frac{\sqrt{10}}{5}}$$

$$\text{tag}\ \Phi = \frac{\text{sen}\,\Phi}{\cos\Phi} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{5}}{\frac{\sqrt{10}}{5}} = \frac{5\sqrt{15}}{5\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{15}.\sqrt{10}}{\sqrt{10}.\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{150}}{10} = \frac{5\sqrt{6}}{10} = \frac{\sqrt{6}}{2} \longrightarrow \boxed{\text{tag}\ \Phi = \frac{\sqrt{6}}{2}}$$

$$\cot\,\Phi = \frac{1}{\text{tg}\,\Phi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} \longrightarrow \boxed{\cot\,\Phi = \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$\sec^2\Phi = 1 + \text{tg}^2 \longrightarrow \sec\,\Phi = \sqrt{1+\text{tg}^2\,\Phi} = \sqrt{1+\frac{(\sqrt{6})^2}{4}} = \sqrt{1+\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{4+6}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\boxed{\sec\,\Phi = \frac{\sqrt{10}}{2}}$$

$$\csc\,\Phi = \frac{1}{\text{sen}\,\Phi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{15}} = \frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15}.\sqrt{15}} = \frac{5\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{3} \longrightarrow \boxed{\csc\,\Phi = \frac{\sqrt{15}}{3}}$$

Ejemplo 2 Si $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ calcular sen α . En este caso se dan los valores de los ángulos.

Solución

Para calcular sen α usamos la identidad $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, de donde despejaremos sen α

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{1}{3} \text{ de donde } \text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Tomamos el signo positivo porque el ángulo es agudo, está entre 0 y 90°

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow \boxed{\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Nótese que hemos racionalizado el denominador.

Ejemplo 3 Dado $\sec x = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ encontrar el sen x

Solución

Para encontrar el sen x debemos usar la identidad $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Si despejamos sen x nos queda que $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ de donde $\text{sen}\,x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ .....(A)

En la expresión (A) no conocemos cos x, pero si usamos el dato conocido sec x podemos obtener el cos x a través de la relación siguiente:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ de donde } \cos x = \frac{1}{\sec x} \ldots\ldots\ldots(B)$$

Sustituyendo el valor de la sec x en (B) tendremos que:

$$\cos x = \frac{1}{\frac{4\sqrt{2}}{5}} = \frac{5}{4\sqrt{2}} \longrightarrow \cos^2 x = \frac{25}{32} \ldots\ldots\ldots(C)$$

Sustituyendo la expresión (C) en (A) se tendrá que:

$$\text{sen } x = \pm\sqrt{1 - \frac{25}{32}} = \pm\sqrt{\frac{32-25}{32}} = \sqrt{\frac{7}{32}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2^4.2}} = \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}.\sqrt{2}}{4\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4.2} = \frac{\sqrt{14}}{8}$$

$$\boxed{\text{sen } x = \frac{\sqrt{14}}{8}}$$

Ejemplo 4 Dado sen a = $\frac{2m}{m^2+1}$, encontrar tag a.

Solución

Como tag a = $\frac{\text{sen a}}{\cos a}$ es necesario conocer el cos a, puesto que sen a es conocido.

Determinemos **cos a** usando la relación $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ y despejando cos a

$$\cos^2 a = 1 - \text{sen}^2 a$$

$$\cos a = \sqrt{1 - \text{sen}^2 a} \qquad \text{(extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros)}$$

$$\cos a = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{(m^2+1)^2}} \qquad \left(\text{por que sí sen } a = \frac{2m}{m^2+1} \text{ entonces sen}^2 a = \frac{4m^2}{(m^2+1)^2}\right)$$

$$\cos a = \sqrt{\frac{(m^2+1)^2 - 4m^2}{(m^2+1)^2}} \qquad \text{(efectuando operaciones dentro de la raíz)}$$

$$\cos a = \sqrt{\frac{m^4 + 2m^2 + 1 - 4m^2}{(m^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{m^4 - 2m^2 + 1}{(m^2+1)^2}}$$

$$\cos a = \sqrt{\frac{(m^2-1)^2}{(m^2+1)^2}} \qquad \text{factorizando el numerador como un trinomio de cuadrado perfecto}$$

$$\mathbf{cos\ a} = \frac{(m^2 - 1)}{(m^2 + 1)}$$ extrayendo raíz cuadrada

Determinemos tag a

Para ello usamos la relación tag a $= \frac{\text{sen a}}{\cos a}$

$$\text{tag a} = \frac{\frac{2m}{m^2+1}}{\frac{m^2-1}{m^2+1}}$$ (sustituyendo sen a y cos a por sus expresiones correspondientes)

$$\text{tag a} = \frac{2m(m^2+1)}{(m^2+1)(m^2-1)}$$ (aplicando la doble C)

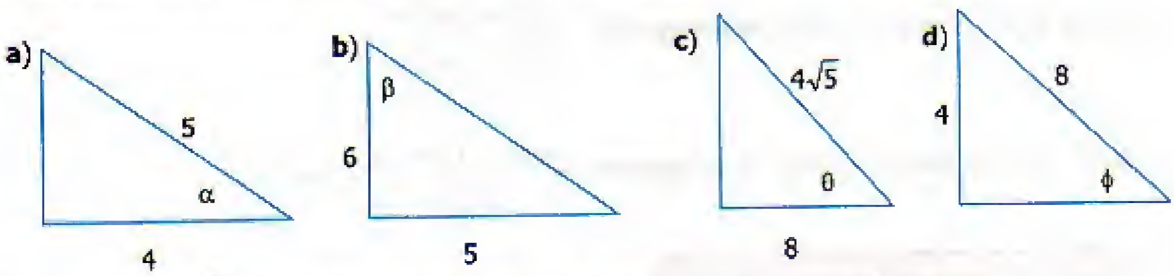
$$\mathbf{tag\ a} = \frac{2m}{(m^2-1)}$$ (simplificando por (m^2+1))

Luego hemos obtenido las expresiones para el cos a y para la tg a

$$\boxed{\cos a = \frac{(m^2-1)}{(m^2+1)}} \qquad \boxed{\text{tag a} = \frac{2m}{(m^2-1)}}$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Observa cada uno de los triángulos de la figura y determina los valores de las funciones trigonométricas del ángulo agudo indicado en cada caso. Simplifica y racionaliza hasta el final.



2. Dado sen $\alpha = \frac{3}{4}$ encontrar el resto de las funciones trigonométricas del ángulo α

3. Sabiendo que sen a = 3/5 calcular tg a.

4. Dado tag $\beta = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ calcular cos β y sen β

5. Sabiendo que sec $\phi = \frac{\sqrt{30}}{2\sqrt{3}}$ calcular sen ϕ y cot ϕ

6. Sabiendo que $\cot \alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ encontrar los valores de los demás razones trigonométricas del ángulo agudo α

7. Sabiendo que $\csc \beta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ calcular $\cos \beta$, $\operatorname{tag} \beta$

8. Sabiendo que $\cos a = \dfrac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ encontrar $\cot a$

9. Dado $\operatorname{tag} \alpha = \dfrac{2m}{m^2 - 1}$ encontrar $\operatorname{sen} \alpha$ y $\sec \alpha$

10. ¿Cuál es el complemento de cada uno de los ángulos siguientes:

a) 30° b) $5\pi/12$ c) $\pi/3$ d) 70° e) $7\pi/18$ f) $\pi/10$ g) 46° h) $4\pi/9$ i) 48°

11. Expresa cada una de las razones trigonométricas dadas en función de sus ángulos complementarios:

a) $\cos 45^\circ$ b) $\operatorname{sen} \pi/6$ c) $\cot 2\pi/5$ d) $\operatorname{sen} 46^\circ$ e) $\cos \pi/6$ f) $\operatorname{tag} 2\pi/5$ g) $\operatorname{sen} 72^\circ$ h) $\cos \pi/3$

i) $\cot 42^\circ$ j) $\operatorname{sen} \pi/4$ k) $\operatorname{sen} 64^\circ$

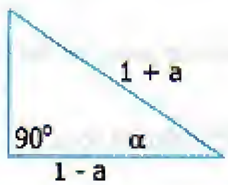
12. Si $\operatorname{sen} \Phi = \dfrac{1}{2}$ hallar el valor de de la expresión $\dfrac{\operatorname{tag}^2\Phi - \cos^2\Phi}{\sec^2\Phi + \cot^2\Phi}$

13. Si $\cot \Phi = 4/3$ calcular el valor de la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}^2\Phi + 2\cos^2\Phi}{\sec^2\Phi - \csc^2\Phi}$

14. Si $\cos \Phi = \dfrac{1}{2}$ calcular el valor de la expresión $\dfrac{\operatorname{tag}^2\Phi - \operatorname{sen}^2\Phi}{\sec^2\Phi - \csc^2\Phi}$

15. Si $\operatorname{tag} \Phi = \sqrt{3}$ calcular el valor de la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}^2\Phi + \cot^2\Phi}{\sec^2\Phi} + \cos^2\Phi$

16. Dado el triángulo de la derecha, calcular, las razones trigonométricas, seno y coseno del ángulo α



Respuestas

1) a) sen α = 3/5 cos α = 4/5 tag α = 3/4 cot α = 4/3 sec α = 5/4

b) $\text{sen}\beta = \dfrac{5\sqrt{61}}{61}$ $\cos\beta = \dfrac{6\sqrt{61}}{61}$ tag β = 5/6 $\cot\beta = \dfrac{\sqrt{61}}{5}$ $\sec\beta = \dfrac{\sqrt{61}}{6}$

$\csc\beta = \dfrac{\sqrt{61}}{5}$ c) $\text{sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ tag θ = 1/2 cot θ = 2

$\sec\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\csc\theta = \sqrt{5}$ d) sen ϕ = ½ $\cos\phi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{tag}\,\phi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\sec\phi = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ csc ϕ = 2

2) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ $\text{tag}\,\alpha = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$ $\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ $\sec\alpha = \dfrac{4\sqrt{7}}{7}$ csc α = 4/3

3) tag a = 3/4 4) $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$ $\text{sen}\,\beta = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 5) $\text{sen}\,\phi = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$ $\cot\phi = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

6) $\csc\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$ $\text{tag}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$ $\sec\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

7) $\text{sen}\,\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cos β = 1/2 tag $\beta = \sqrt{3}$ $\cot\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ sec β = 2

8) $\text{sen}\,a = \dfrac{2mn}{m^2+n^2}$ $\cot a = \dfrac{m^2-n^2}{2mn}$ 9) $\sec\alpha = \dfrac{m^2+1}{m^2-1}$ $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{2m}{m^2+1}$

10) a) 60° b) π/12 c) π/6 d) 20° e) π/9 f) 2π/5 g) 44° h) π/18

11) a) sen 45° b) cos π/3 c) tag π/10 d) cos 44° e) sen π/3 f) cot π/10 g) cos 18°

h) sen π/6 i) tag 48° j) cos π/4 k) cos 26°

12) $-\dfrac{5}{52}$ 13) $-\dfrac{5904}{4375}$ 14) $\dfrac{27}{32}$ 15) $\dfrac{25}{48}$ 16) $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{2\sqrt{a}}{1+a}$ $\cos\alpha = \dfrac{1-a}{1+a}$

Resumen de las identidades trigonométricas fundamentales

Las identidades recíprocas	1. $\csc x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}$
	2. $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
	3. $\cot x = \dfrac{1}{\text{tag}\, x}$
Las identidades del cociente	4. $\text{tag}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$
	5. $\cot x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}$
Las identidades Pitagóricas	6. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
	7. $\text{tag}^2 + 1 = \sec^2 x$
	8. $1 + \cot^2 x = \csc^2$

Recordemos que para cosecante puede escribirse cosec o csc

Simplificación de expresiones trigonométricas

Antes de dar inicio al estudio de la demostración o verificación de identidades, debemos adquirir destrezas en el proceso de simplificación de expresiones que sólo contengan las relaciones trigonométricas que nos interesen.

Ejemplo 1

Dada la expresión $\dfrac{1 + \cot x}{\text{sen}}$ expresarla en términos de senx y cos x.

$\dfrac{1 + \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}}{\text{sen}\, x}$ (escribiendo cot x en función de sen x y cos x)

$\dfrac{\dfrac{\text{sen}\, x + \cos x}{\text{sen}\, x}}{\text{sen}\, x}$ (efectuando la suma de fracciones en el numerador hallando m.c.m = sen x)

$\dfrac{\text{sen}\, x + \cos x}{\text{sen}^2 x}$ (desarrollando la fracción compleja)

Nótese que nos quedó una expresión en términos de sen y cos.

Ejemplo 2 Dada la expresión $\frac{1-\text{tag x}}{\cot x - 1}$ expresarla en términos de sen x y cos x. Simplificar

$$\frac{1-\frac{\text{sen x}}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\text{sen x}}-1}$$ (escribiendo tag x y cot x en función de sen x y cos x)

$$\frac{\frac{\cos x - \text{sen x}}{\cos x}}{\frac{\cos x - \text{sen x}}{\text{sen}}}$$ (efectuando las fracciones en el numerador y denominador)

$$\frac{\text{sen x}(\cos x - \text{sen x})}{\cos x(\cos x - \text{sen x})}$$ [desarrollando la fracción compleja (aplicando doble c)]

$$\frac{\text{sen x}}{\cos x}$$ [simplificando por (cos x – sen x)]

Ejemplo 3 Expresar (cot x + csc x)(tag x – sen x) en términos de sen x y cos x

Escribimos cot x, cosec x, tag x en función de sen x y cos x, quedándonos que:

$$\left(\frac{\cos x}{\text{sen x}}+\frac{1}{\text{sen x}}\right)\left(\frac{\text{sen x}}{\cos x}-\text{sen x}\right) = \left(\frac{\cos x + 1}{\text{sen x}}\right)\left(\frac{\text{sen x} - \text{sen x}\cos x}{\cos x}\right)$$

Si tomamos factor común sen x en el segundo paréntesis nos queda que:

$$= \left(\frac{\cos x + 1}{\text{sen x}}\right)\frac{\text{sen x}(1-\cos x)}{\cos x} = \frac{(\cos x + 1)(1-\cos x)}{\cos x}$$

En la penúltima expresión hemos simplificado por el sen x

Ejemplo 4 Expresar en términos de sec x y cosec x la expresión $\frac{\cos x}{1+\text{sen x}}+\frac{\cos x}{1-\text{sen x}}$

Sustituyendo por las identidades recíprocas tenemos:

$$\frac{\frac{1}{\sec x}}{1+\frac{1}{\csc x}}+\frac{\frac{1}{\sec x}}{1-\frac{1}{\csc x}} = \frac{\frac{1}{\sec x}}{\frac{\csc x + 1}{\csc x}}+\frac{\frac{1}{\sec}}{\frac{\csc x - 1}{\csc x}} = \frac{\csc x}{\sec x(\csc x + 1)}+\frac{\csc x}{\sec x(\csc x - 1)} =$$

Hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores: sec x(cosec x + 1)(cosec x – 1) y efectuamos la suma de fracciones, quedándonos que:

$$= \frac{\csc x(\csc x - 1) + \csc x(\csc x + 1)}{\sec x(\csc x + 1)(\csc x - 1)}$$

$$= \frac{\csc x(\csc x - 1 + \csc x + 1)}{\sec x(\csc^2 x - 1)}$$ (Hemos tomado cosec x factor común)

Si efectuamos operaciones en el paréntesis del numerador nos queda:

$$= \frac{\csc x . 2\csc x}{\sec x(\csc^2 x - 1)} = \frac{2\csc^2 x}{\sec x(\csc^2 x - 1)}$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Simplifica cada una de las expresiones de tal manera que contenga sen, cos y constantes.

a) $\cot x \cdot \sec x$ b) $\text{sen}^2 x\,(\cot^2 x + 1)$ c) $\dfrac{\cot x + \sec x}{\text{sen}\, x}$ d) $\dfrac{\text{tag}\, x + \text{cosec}\, x}{\cot x + \sec x}$

e) $\dfrac{1}{\text{tag}\, x + \cot x}$ f) $\dfrac{\cot x . \cos x}{\csc^2 x - 1}$ g) $\dfrac{\csc x + \sec x}{1 + \text{tag}\, x}$ h) $\csc^4 x - \cot^4 x$

2. Simplifica cada una de las expresiones de tal manera que contenga sec, cosec y constantes.

a) $\dfrac{\text{sen}\, x + \cos x}{\text{sen}\, x - \cos x}$ b) $\dfrac{\cos x}{1 + \text{sen}\, x} + \dfrac{\cos x}{1 - \text{sen}\, x}$ c) $(\cos t - \text{sen}\, t)(\cos t + \text{sen}\, t)$

d) $(\text{tag}\, u + \cot u)(\cos u + \text{sen}\, u)$ e) $\dfrac{\cot B + \cos B}{\cos B . \cot B}$ f) $\text{tag}\, x(\text{tag}\, x + \cot x)$

3. Transfórmense las expresiones dadas en otras expresiones equivalentes escritas en términos de sen t

a) $\text{sen}\, t \sec t \cot t - \cos^2 t$ b) $\dfrac{\text{sen}^2 t \sec t}{2 \tan t}$ c) $\dfrac{\sec^2 t - \text{tag}^2 t}{\cos ec^2 t}$

4. Transfórmense las expresiones dadas en otras expresiones equivalentes escritas en términos de cos u.

a) $\sec u - \text{sen}\, u\, \text{tag}\, u$ b) $\dfrac{\cot u\, \text{tag}\, u - \text{sen}^2 u}{2\, \text{sen}\, u\, \cot u}$ c) $\dfrac{\cot^2 u - \csc^2 u}{\sec u}$

4.8 Demostración o verificación de identidades.

Nuestro objetivo está fundamentado en la aplicación de las ocho identidades estudiadas hasta ahora, y las técnicas del álgebra, con el fin de probar otras identidades.

No existe en sí un método general que pueda ser aplicado, pues, a medida que trabajemos en los ejemplos iremos observando sugerencias de gran utilidad.

Veamos algunas *sugerencias útiles* para verificar identidades:

- Debe trabajarse inicialmente sólo con un miembro, generalmente el más complicado, transformándolo en la forma más simple del otro.
- Háganse sustituciones utilizando las identidades básicas. A veces es de gran utilidad escribir la expresión en términos de senos y cosenos
- Debe considerarse la posibilidad de aplicar procesos algebraicos como multiplicaciones, factorizaciones, combinación de fracciones en una fracción simple y simplificaciones de fracciones complejas.

EJEMPLOS

Ejemplo 1 Demostrar la identidad $\dfrac{1}{\tan x + \cot x} = \dfrac{1}{\sec x . \csc x}$

Solución

Intentemos reescribir el miembro de la izquierda en términos de senos y cosenos y luego simplificar:

$$\frac{1}{\tan x + \cot x} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$ Escribiendo en términos de sen x y cos x

$$= \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen} x}}$$ Efectuando el denominador como suma de fracciones

$$= \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}$$ Aplicando doble c

$$= \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{1}$$ Aplicando identidad pitagórica en el denominador

$$= \cos x \operatorname{sen} x$$

$$= \frac{1}{\sec x} \cdot \frac{1}{\csc x}$$ Aplicando propiedad recíproca

Luego $\dfrac{1}{\tan x + \cot x} = \dfrac{1}{\sec x \csc x}$

Ejemplo 2 Demostrar la identidad $\dfrac{\csc x + \sec x}{1 + \tan x} = \csc x$

La expresión de la izquierda resulta más compleja, por lo que debemos iniciar con ella. Podemos expresarla en términos de seno y coseno, para aplicar después procesos algebraicos para obtener el segundo miembro.

$$\frac{\csc x + \sec x}{1 + \tan x} = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{\cos x}}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}$$ Escribiendo en términos de sen y cos

$$= \frac{\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cos x}}{\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x}}$$ Efectuando las operaciones con fracciones

$$= \frac{\cos x(\cos x + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x \cos x(\cos x + \operatorname{sen} x)}$$ Efectuando la fracción compleja (doble c)

$$= \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x$$

Ejemplo 3

Demostrar la identidad $\sec x\,(\cot x - 1) + \csc x\,(1 - \operatorname{tag} x) = 2(\csc x - \sec x)$

Seleccionemos el primer miembro de la igualdad para llegar al segundo miembro:

$\sec x\,(\cot x - 1) + \csc x\,(1 - \operatorname{tag} x)$

$= \sec x.\ \cot x - \sec x + \csc x - \csc x.\ \operatorname{tag} x$ (Hemos aplicado propiedad distributiva)

$= \dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \sec x + \csc x - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ (Hemos sustituido por sus identidades)

$= \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \sec x + \csc x - \dfrac{1}{\cos x}$ (Hemos simplificado)

$= \csc x - \sec x + \csc x - \sec x$ (Aplicando identidades recíprocas)

$= 2\csc x - 2\sec x$ (Sumando términos semejantes)

$= 2\,(\csc x - \sec x)$ (Tomando 2 factor común)

Ejemplo 4

Demostrar la identidad $\dfrac{1 + \cot x}{\csc x} = \dfrac{1 + \operatorname{tag} x}{\sec x}$

En la verificación de la identidad trabajaremos cada miembro por separado.

1. Iniciemos con el miembro de la izquierda de la igualdad y escribimos cot x, cosec x en términos de seno x y cos x.

$$\frac{1 + \cot x}{\csc x} = \frac{1 + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}$$ (Efectuando la suma de fracciones en el numerador)

$$= \frac{\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x + \cos x)}{\operatorname{sen} x}$$ (Efectuando la fracción compleja, doble c)

$= \operatorname{sen} x + \cos x$ (Simplificando por sen x)

2. Expresemos ahora el miembro de la derecha en términos de sen x y cos x

$$\frac{1+\text{tag}\,x}{\sec x}=\frac{1+\frac{\text{sen}x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}}$$

$$=\frac{\frac{\cos x+\text{sen}\,x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}}$$ (Efectuando la suma de fracciones en el numerador)

$$=\frac{\cos x(\cos x+\text{sen}\,x)}{\cos x}$$ (Efectuando la fracción compleja)

$$=\cos x+\text{sen}\,x$$ (Simplificando cos x)

Como hemos verificado que cada lado es igual a sen x + cos x se concluye que

$$\frac{1+\cot x}{\csc x}=\frac{1+\text{tag}\,x}{\sec x}$$

Ejemplo 5 Demostrar la identidad $\frac{\text{sen}y}{1+\cos y}+\frac{1+\cos y}{\text{sen}y}=2\csc y$

Partimos desde el primer miembro efectuando la suma de fracciones. Para ello obtenemos el m.c.m el cual es sen y(1 + cos y).

$$\frac{\text{sen}^2\,y+(1+\cos y)(1+\cos y)}{\text{sen}\,y(1+\cos y)}$$ (Efectuando la suma de fracciones)

$$=\frac{\text{sen}^2\,y+(1+\cos y)^2}{\text{sen}\,y(1+\cos y)}$$ [Porque $(1+\cos y)(1+\cos y) = (1+\cos y)^2$]

$$=\frac{\text{sen}^2\,y+1+2\cos y+\cos^2 y}{\text{sen}\,y(1+\cos y)}$$ [Por el cuadrado de una suma $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$]

$$=\frac{\text{sen}^2\,y+\cos^2 y+1+2\cos y}{\text{sen}\,y(1+\cos y)}$$ (Agrupando para que nos quede $\text{sen}^2 y + \cos^2 y$)

$$=\frac{1+1+2\cos y}{\text{sen}\,y(1+\cos y)}$$ (Porque $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$)

$$=\frac{2+2\cos y}{\text{sen}\,y(1+\cos y)}$$ (Porque 1+1 = 2)

$= \dfrac{2(1+\cos y)}{\operatorname{sen} y(1+\cos y)}$ (Tomando factor común 2 en el numerador)

$= \dfrac{2}{\operatorname{sen} y}$ [Simplificando por (1 + cos y)]

$= 2\csc y$ (Aplicando identidades recíprocas 1/seny = csc y)

Ejemplo 6 Demostrar $\dfrac{\cos^4 t - \operatorname{sen}^4 t}{\cos t + \operatorname{sen} t} = \cos t - \operatorname{sen} t$

Observemos que el numerador es una diferencia de cuadrados $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

$$\frac{\cos^4 t - \operatorname{sen}^4 t}{\cos t + \operatorname{sen} t} = \frac{(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)}{\cos t + \operatorname{sen} t}$$

$= \dfrac{(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t).1}{\cos t + \operatorname{sen} t}$ Porque $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

$= \dfrac{(\cos t - \operatorname{sen} t)(\cos t + \operatorname{sen} t)}{\cos t + \operatorname{sen} t}$ Factorizando $\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$

$= \cos t - \operatorname{sen} t$ Simplificando por (cos t + sen t)

Ejemplo 7 Demostrar la identidad $(1 - \operatorname{tag} x)^3 = \dfrac{\cot x - 1}{\cot x}(\sec^2 x - 2\operatorname{tag} x)$

Solución

Como puede observarse, el miembro de la derecha es más complejo, por lo que debemos iniciar con él.

Puede notarse también, que el miembro de la izquierda contiene tag x, razón por el cual el miembro de la derecha lo expresaremos en función de tag x.

$$\frac{\cot x - 1}{\cot x}(\sec^2 - 2\operatorname{tag} x) = \frac{\frac{1}{\operatorname{tag} x} - 1}{\frac{1}{\operatorname{tag} x}}(1 + \operatorname{tag}^2 - 2\operatorname{tag} x)$$

Ordenando los tèrminos en el paréntesis

$= \dfrac{\frac{1 - \operatorname{tag} x}{\operatorname{tag} x}}{\frac{1}{\operatorname{tag} x}}(1 - 2\operatorname{tag} x + \operatorname{tag}^2 x)$ Efectuando resta de fracciones

$= \dfrac{\operatorname{tag} x(1 - \operatorname{tag} x)}{\operatorname{tag} x}(1 - \operatorname{tag} x)^2$ Factorizando el paréntesis

$= (1 - \text{tag } x)(1 - \text{tag } x)^2$ Simplificando por tag x

$= (1 - \text{tag } x)^3$ Efectuando el producto de dos binomios

Hemos partido desde el segundo miembro y hemos llegado al primero, demostrando la identidad.

Ejemplo 8

Demostrar la identidad sec x(cot x − 1) + csc x(1 − tag x) = 2(csc x − sec x)
Partimos desde el primer miembro aplicando la propiedad distributiva en cada paréntesis

$\sec x(\cot x - 1) + \csc x(1 - \text{tag } x) = \sec x \, . \, \cot x - \sec x + \csc x - \csc x . \text{tag } x$

Al aplicar las identidades recíprocas, y sustituir tag x y cot x por sen x/cos x y cos x/sen x, nos queda que:

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\text{sen} x} - \sec x + \csc x - \frac{1}{\text{sen } x} \cdot \frac{\text{sen} x}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{\text{sen} x} - \sec x + \csc x - \frac{1}{\cos x}$$ (Simplificando)

$= \csc x - \sec x + \csc x - \sec x$ (Por identidades recíprocas)

$= 2 \csc x - 2 \sec x$ Reducción de términos semejantes

$= 2(\csc x - \sec x)$ Tomando 2 factor común

Luego hemos demostrado que:

$$\sec x(\cot x - 1) + \csc x(1 - \text{tag } x) = 2(\csc x - \sec x)$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

Demuestra cada una de las siguientes identidades:

1. $\cos \alpha \sec \alpha = 1$
2. $\cos \alpha \csc \alpha = \cot \alpha$
3. $\cos^2 \alpha \, \text{tag}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$
4. $\cos \alpha + \text{sen } \alpha \, \text{tag } \alpha = \sec \alpha$
5. $\text{sen } x + \cos x \cot x = \csc x$
6. $\dfrac{\cos x}{\cot x} = \text{sen } x$
7. $\dfrac{1}{\csc x - 1} - \dfrac{1}{\csc x + 1} = 2\text{tag}^2 x$
8. $\dfrac{1}{1 + \text{sen } x} + \dfrac{1}{1 - \text{sen } x} = 2 \sec^2 x$
9. $\sec^2 \beta + \csc^2 \beta = \sec^2 \beta \, . \, \csc^2 \beta$
10. $(\text{tag } \beta + \cot \beta)^2 = \sec^2 \beta \, .\text{cosec}^2 \beta$
11. $\cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \, . \cot^2 x$
12. $\cot \theta + \text{tag } \theta = \sec \theta \csc \theta$
13. $\sec^2 \alpha - \csc^2 \alpha = \text{tag}^2 \alpha - \cot^2 \alpha$
14. $\text{sen } x (\csc x - \text{sen } x) = \cos^2 x$
15. $\csc x = \dfrac{\cot x + \text{tag } x}{\sec x}$
16. $\dfrac{\cot B - \text{tag } B}{\text{sen} B + \cos B} = \csc B - \sec B$

17. $\csc^4 \alpha - \cot^4 \alpha = \csc^2 \alpha + \cot^2 \alpha$

18. $\cos^4 \alpha - \text{sen}^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$

19. $(\text{tag}\, x + \cot x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$

20. $\text{tag}^4 \beta + \text{tag}^2 \beta = \sec^4 \beta - \sec^2 \beta$

21. $\dfrac{1+\text{sen}x}{1+\text{sen}x} - \dfrac{1-\text{sen}\, x}{1+\text{sen}\, x} = 4\, \text{tag}\, x \sec x$

22. $\cos^2 x \cot^2 x = \cot^2 x - \cos^2 x$

23. $(\cot \beta + \cos \beta)^2 - (\cot \beta - \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \beta \csc \beta$

24. $\dfrac{2\, \text{tag}\, x}{1-\text{tag}^2 x} + \dfrac{1}{2\cos^2 x - 1} = \dfrac{\cos x + \text{sen}\, x}{\cos x - \text{sen}\, x}$

25. $\csc^4 \alpha - \csc^2 \alpha = \cot^4 \alpha + \cot^2 \alpha$

26. $\dfrac{1-\cot^2 x}{1+\cot^2 x} = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$

27. $\text{tag}^2 \beta - \text{sen}^2 \beta = \text{tag}^2 \beta\, \text{sen}^2 \beta$

28. $\dfrac{\text{sen}A + \cos B}{\text{sen}A - \cos B} = \dfrac{\sec A + \csc B}{\sec A - \csc A}$

29. $\dfrac{\cos x \cot x}{\cot x - \text{sen}\, x} = \dfrac{\cot x + \cos x}{\cos x \cot x}$

30. $(\text{sen}\, x + \cos x)^2 + (\text{sen}\, x - \cos x)^2 = 2\, (\text{tag}^2 x \cos^2 x + \cot^2 x\, \text{sen}^2 x)$

31. $\dfrac{\sec x\ \cot x - \csc x\ \text{tag}\, x}{\cos x - \text{sen}\, x} = \csc x \sec x$

32. $\text{sen}^4 \beta - \cos^4 \beta = \text{sen}^2 \beta - \cos^2 \beta$

33. $\dfrac{\cos x}{1-\text{tag}\, x} + \dfrac{\text{sen}\, x}{1-\cot x} = \text{sen}\, x + \cos x$

34. $\sec x = \dfrac{\cos x}{2(1+\text{sen}\, x)} + \dfrac{\text{sen}\, x}{2(1-\cos x)}$

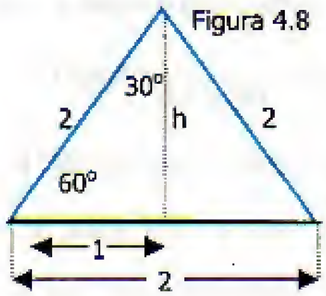
4.9 Valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30°-45°-60°

Para los ángulos de 30° ($\pi/6$) y 60° ($\pi/3$)

Partimos de la construcción de un triángulo equilátero (tres lados de igual longitud) de lado 2 unidades, como el mostrado en la figura 4.8.
Al ser un triángulo equilátero los ángulos internos mide cada uno 60°.
Al trazar la altura (mediatriz) correspondiente a la base, ella divide al ángulo del vértice superior en dos ángulos iguales de 30°.

Apliquemos el teorema de Pitágoras con el objeto de obtener el valor de la altura h.
Para ello usaremos el triángulo del lado izquierdo:
$h^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$
$h = \sqrt{3}$

Figura 4.8



Si en el triángulo rectángulo de la figura 4.8 aplicamos las relaciones trigonométricas para los ángulos de 30° y 60° se tendrá que:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{tag} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{tag} 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Como 30° y 60° son dos ángulos complementarios se tendrá que:

$$\cos 30^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tag} 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{tag} 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

Para el angulo de 45° ($\pi/4$)

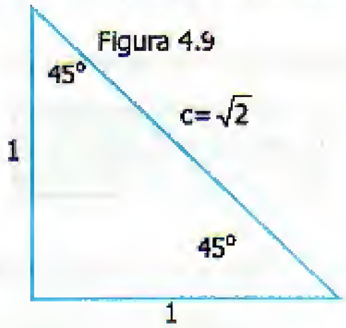
Aquí consideraremos un triángulo rectángulo isósceles, con dos lados de longitud igual 1 unidad.

Si los lados del triángulo son de igual longitud es lógico que los valores de los ángulos opuestos también lo serán, midiendo cada uno 45°.
Si aplicamos Pitágoras al triángulo

$c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$c = \sqrt{2}$

Figura 4.9



Apliquemos las relaciones trigonométricas en el triángulo para el ángulo de 45°

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{tag} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \qquad \sec 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \qquad \cot 45^\circ = 1$$

4.10 Valores de las razones trigonométricas para 0° y 90°

- ***Para el ángulo de 0°***

Consideremos un ángulo α de origen O y determinemos un punto M sobre el lado inicial. Figura 4.10

Desde M trazamos una perpendicular que corte al lado terminal del ángulo en un punto S. Esto origina tres segmentos $\overline{OS} = r$ $\overline{OM} = x$ $\overline{MS} = y$

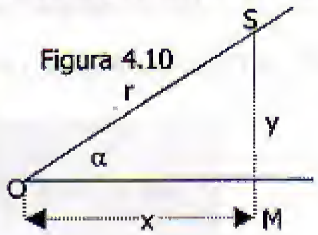


Figura 4.10

Para que α = 0° debe ocurrir en la figura lo siguiente:
$\overline{OS}$ coincide $\overline{OM}$ → $r = x$
$\overline{MS}$ se anula → $y = 0$

Si aplicamos las relaciones trigonométricas en el triángulo OMS se tendrá que:

$$\text{sen } 0^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{r} = 0 \qquad \cos 0^\circ = \frac{x}{r} = \frac{x}{x} = 1 \qquad \text{tag } 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{x} = 0$$

- ***Para el àngulo de 90°***

Si α = 90° en la figura 5.10 ocurre que: $\overline{OS} = \overline{MS}$ → $r = y$
$\overline{OM} = 0$ → $x = 0$

En estas condiciones se tendrá que:

$$\text{sen } 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{y}{y} = 1 \qquad \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0 \qquad \text{tag } 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{y}{0} = \infty$$

TABLA RESUMEN PARA LOS ÁNGULOS DE 0° – 30° - 45° - 60° - 90°

FUNCIÓN	0°	30° (π/6)	45° (π/4)	60° (π/3)	90° (π/2)
SEN	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
COS	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
TAG	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe

Ejercicios resueltos

Sin hacer uso de la calculadora y tomando los valores de los ángulos de 0°-30°-45°-60°-90°, hallar el valor numérico exacto de las siguientes expresiones:

1.) $\text{tag } 60^\circ + \text{cto } 30^\circ - \dfrac{\cos 30^\circ}{2} = \sqrt{3} + \dfrac{3}{\sqrt{3}} - \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \sqrt{3} + \dfrac{3}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4(\sqrt{3})^2 + 12 - (\sqrt{3})^2}{4\sqrt{3}} =$

$$= \frac{12+12-3}{4\sqrt{3}} = \frac{21}{4\sqrt{3}} = \frac{21\sqrt{3}}{12} = \frac{7\sqrt{3}}{4}$$

2.) $\dfrac{\text{sen } 30^\circ + \cos 45^\circ}{\text{tag } 60^\circ}$. Sustituimos los valores de los ángulos en la expresión y luego efectuamos las operaciones matemáticas correspondientes.

$$\frac{\text{sen } 30^\circ + \cos 45^\circ}{\text{tag } 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}$$

3.) $\dfrac{\sqrt{3}\cos^2 60^\circ}{\cos 30^\circ} + \dfrac{\text{sen}^2\, 45^\circ}{\cos 60^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}.(\frac{1}{2})^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \dfrac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \dfrac{\frac{2}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{\ }} + \dfrac{4}{4} = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$

4.) $\dfrac{2\,\text{sen}\frac{\Pi}{4} - 3\cos\frac{\Pi}{2}}{5\text{ tag}} = \dfrac{2\frac{\sqrt{2}}{2} - 3.0}{5.\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\frac{5\sqrt{6}}{6}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} = \dfrac{6\sqrt{2}\sqrt{6}}{30} = \dfrac{6\sqrt{12}}{30} = \dfrac{\sqrt{12}}{5} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

$$\frac{2\cot\frac{\Pi}{6} + 3\sec 30^\circ + 2\sqrt{3}\,\text{sen}\frac{\Pi}{6}}{\text{sen}\frac{\Pi}{6} + \cos\frac{\Pi}{2} + \sec\frac{\Pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3} + 3.\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}.\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}}} =$$

$$\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}(2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\sqrt{3})}{3\sqrt{3}+4} = \frac{2\sqrt{3}.5\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+4} = \frac{10.3}{3\sqrt{3}+4} = \frac{30}{3\sqrt{3}+4} = \frac{30(3\sqrt{3}-4)}{(3\sqrt{3}+4)(3\sqrt{3}-4)}$$

$$= \frac{30(3\sqrt{3}-4)}{(3\sqrt{3})^2 - 4^2} = \frac{30(3\sqrt{3}-4)}{27-16} = \frac{30(3\sqrt{3}-4)}{11}$$

4.11 Las razones trigonométricas en la calculadora.

Hasta el momento hemos trabajado con ángulos que son especiales como los de 30°, 45°, 60° y 90°. Cuando los ángulos no son especiales o notables, haremos uso de las calculadoras electrónicas.

Hoy en día nos encontramos con los adelantos de la electrónica, la cual ha puesto en nuestras manos la calculadora científica. Antes era necesario recurrir a las tablas trigonométricas para obtener los valores de las razones trigonométricas.

Aportaremos aquí una guía práctica para el uso:

Características generales de una calculadora

En una calculadora se muestran generalmente los siguientes elementos:

MODE: Es una tecla que nos permite la escogencia del sistema de medida angular: Deg-Rad-Gra
DEG : Sistema sexagesimal de medida angular.
RAD: Sistema cíclico.
GRA: Sistema centesimal de medida angular.

SHIFT O INV: Permite calcular el inverso de las funciones.

ARC: Sirve para calcular el ángulo cuando es conocida la relación.

+/_ : Cambia de signo la cantidad que aparece en pantalla.

1/x o **x^{-1}**: Encuentra el inverso multiplicativo de una cantidad

sen^{-1} cos^{-1} tag^{-1} : Nos permiten obtener el valor de la relación trigonométrica buscada.

←° ′ ″ : Transforma el valor de un ángulo expresado en grados, minutos y segundos en forma decimal y acompañada de **INV** realiza el proceso contrario.

Al realizar los cálculos con las razones trigonométricas en la calculadora se nos presentan dos situaciones:

El problema directo. Dado un ángulo, determinar una razón trigonométrica.

Calculemos sen 20° 15′ 32″ con la calculadora. Para ello debemos realizar los siguientes pasos:
Se coloca la calculadora en posición DEG (en pantalla DEG)

Se teclea 20 [° ′ ″] 15 [° ′ ″] 32 [° ′ ″] sen. Aparece en pantalla **0,3462626043**

En algunas calculadoras es necesario pulsar primero sen. Así:

sen 20 [° ′ ″] 15 [° ′ ″] 32 [° ′ ″] apareciendo en pantalla : **0,3462626043**

Es importante hacer notar que las calculadoras no tienen teclas para *secante, cosecante* y *cotangente*, por lo que pueden ser usadas las funciones recíprocas y la tecla 1/x o x^{-1}

Determinemos sec 48°

Se teclea 48º, oprimimos la tecla de coseno y luego oprimimos 1/x para obtener el recíproco de 48º, obteniéndose sec 48º. Aparece en pantalla 1,49447655

Luego sec 48º = 1,49447655

Para cot 56 se teclea 56º, se oprime la tecla de tangente y luego oprimimos 1/x para obtener el recíproco de 56º. Aparece en pantalla 0,6745085166

Luego tag 56º = 0,6745085166

Veamos los ejemplos mostrados a continuación:

1. Obtener sen 20° 15′ 32″

20 [° ′ ″] 15 [° ′ ″] 32 [° ′ ″] [sen] . En pantalla se ve: **0,3462626043**

2. cos 32° 15′ 42″ = 0,8440628506

3. tag 47° 38′ 12″ = 1,096548197

4. sec 52° 23′ 18″ = 1,262362652

5. cosec 37° 25′ 34″ = 1,645446411

El problema inverso.

Dada una razón trigonométrica, encontrar el ángulo agudo correspondiente.

Encontremos el ángulo α sabiendo que sen α = 0,2734.

Se teclea 0.2734 **inv** sen^{-1} apareciendo en pantalla **15.8668728**. A continuación las teclas **INV** ° □ ″ apareciendo en pantalla 15° 52′ 0,07″

En otras calculadoras se teclea 0.2734 arc sen, apareciendo en pantalla **15.8668728**, luego las teclas **INV** y ° ′ ″, apareciendo en pantalla 15° 52′ 0,07″

A veces se teclea sen^{-1} 0.2734 y aparece en pantalla **15.8668728**

La solución obtenida va siempre expresada en grados. Si deseamos obtener este resultado en grados, minutos y segundos , bastará pulsar, conservando en pantalla **15.8668728**, las teclas **SHIFT** y ° ′ ″ o **INV** y ° ′ ″. De esta manera se obtiene 15° 52′ 0,07″

Luego

Si sen α = 0,2734 → α = 15° 52′ 0,07″

Veamos varios ejemplos mostrados a continuación:

1. sen B = 0,285624 → B = 16° 35′ 15″
2. tag x = 1,25789 → x = 51° 30′ 57″
3. cos α = 0,18564 → α = 16° 35′ 15″
4. cos β = 0,01678 → β = 89° 2′ 19″

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Utiliza la calculadora y halla el valor de cada una de las siguientes relaciones trigonométricas:

a) sen 40° 25′ 18″ d) cos 26° 18′ 34″ g) tag 48° 27′ 16″ j) cot 21° 32′ 12″

b) sec 47° 22′ 18″ e) sen 23° 18′ 19″ h) cos 56° 32′ 34″ k) csc 22° 18′ 26″

c) tag 49° 22′ 18″ f) sec 34° 22′ 15″ i) sen 21° 12′ 32″ ℓ) cos 12° 18′ 9″

2. Hallar el valor de los ángulos que tienen las siguienes relaciones:

a) sen A = 0,4836 d) cos α = 0,5623 g) tag β = 3,467 j) sec x = 1,4920

b) cot θ = 1,272 e) sen β = 0,4384 h) csc x = 1,086 k) cos ω = 0,7450

c) sen B = 0,9630 f)) cos x = 0,8700) i) sen β = 0,4929 ℓ) tag x = 0,7931

3. Utiliza la calculadora, haz las operaciones y encuentra el valor de A en cada caso:

a) A = 0,75. cos 23° b) A = 2,5 . sen 43° 5′ 8″ c) A = 4 cos 32° 20′ + 5 sen 25°

d) $A = \dfrac{4 \text{ sen } 24°}{\cos 32°}$ e) $A = \dfrac{6}{\text{tag } 54°}$ f) A = 100.cos 19° 26′ 16″+ 200. sen 18° 12′

g) A = cos 25° tag 42° + 500.cos 32° 22′ + 0,5.sen 57°

4. Se dan los siguientes ángulos expresados en grados, minutos y segundos: α = 24° 32′ 43″

β = 32° 25′ 16″ θ = 18° 12′ 24″ ϕ = 72° 22′ 20″

Usando la calculadora efectuar las operaciones :

a) $\alpha + \beta$ b)$\beta + \phi$ c) $\phi - \theta$ d) $90° - \beta$

e) $2(\phi - \alpha)$ f) $3\phi - \beta$ g) $90° - (\alpha + \theta)$ h) $2\theta - \beta$

Respuestas

1. a) 0,6484 b) 1,4765 c) 1,1656 d) 0,8964 e) 0,3956 f) 1,2115 g) 1.1285
h) 0,5514 i) 0,3618 j) 2,5339 k) 2,6345 ℓ) 0,9770

2. a) $A = 28°\ 55'\ 15''$ b) $\theta = 38°\ 10'\ 28''$ c) $B = 74°\ 21'\ 55''$ d) $\alpha = 55°\ 47'\ 06''$
e) $\beta = 26°\ 0'\ 6{,}6''$ f) $x = 29°\ 32'\ 29''$ g) $\beta = 73°\ 54'\ 38''$ h) $x = 67°\ 2'\ 36''$
i) $\beta = 29°\ 31'\ 53''$ j) $x = 47°\ 55'\ 03''$ k) $\omega = 41°\ 50'\ 27''$ ℓ) $x = 38°\ 25'\ 05''$

3. a) 0,69 b) 1,7169 c) 5,4929 d) 1,9185 e) 4,3593 f) 156,71 g) 423,55

4. a) $56°\ 57'\ 59''$ b) $104°\ 47'\ 36''$ c) $54°\ 9'\ 56''$ d) $57°\ 34'\ 44''$
e) $95°\ 39'\ 14''$ f) $184°\ 41'\ 44''$ g) $47°\ 14'\ 53''$ h) $3°\ 59'\ 32''$

4.12 Resolución de triángulos rectángulos

El objeto de estudio de esta sección es la resolución de los triángulos rectángulos.

Resolver un **triángulo rectángulo** consiste en encontrar las medidas de sus seis elementos, tres lados y dos ángulos (el tercero será recto), a partir de algunos de ellos que son conocidos.

Debemos conocer como mínimo tres de sus elementos siempre y cuando uno de ellos sea un lado. Ahora bien, para poder determinarlos es necesario recurrir a alguna de las siguientes relaciones:

Entre los ángulos (la suma de los ángulos de un triángulo es igual a180°)

Entre los lados (teorema de Pitágoras)

Entre los lados y los ángulos (razones trigonométricas)

Para el estudio analizaremos todos los casos posibles: el primero, cuando se conocen dos lados, y el segundo, cuando se conocen un lado y un ángulo agudo.

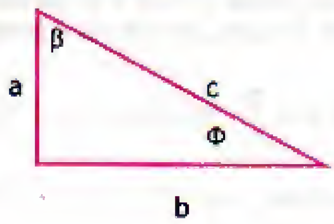
Primer caso. Conocidos dos lados

Cuando en un triángulo, los datos conocidos son las longitudes de dos de sus lados, existe la posibilidad de que uno de ellos sea la hipotenusa o que los dos sean catetos.

EJEMPLOS

Ejemplo 1.

Resolver el triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 cm y 6 cm.



Datos: a = 4 cm b = 6 cm

Incógnitas: c = ? Φ = ? β = ?

Solución

Para obtener el ángulo Φ utilizaremos la relación tag $\Phi = \frac{a}{b}$ en la cual sustituimos a y b por sus valores, quedándonos que: tag $\Phi = \frac{4\text{ cm}}{6\text{ cm}} = 0{,}66666$ de donde $\boxed{\Phi = 33°\ 41'\ 24''}$

La medida del ángulo β la hallamos restando de 90° el valor de Φ .

$$\beta = 90^0 - 33°\ 41'\ 24'' = 56°\ 18'\ 36''$$

$$\boxed{\beta = 56°\ 18'\ 36''}$$

La hipotenusa c puede ser calculada aplicando el **teorema de Pitágoras** o por una relación trigonométrica. En nuestro caso aplicaremos el segundo método.

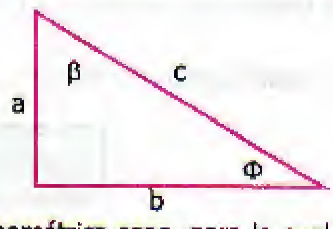
Si observamos el triángulo podemos aplicar la relación sen $\Phi = \frac{a}{c}$ de donde $c = \frac{a}{\text{sen}\,\Phi}$

Sustituyendo a y Φ por sus valores tenemos: $c = \frac{4\text{ cm}}{\text{sen}\ 33°\ 41'\ 24''}$ de donde c = 7,21 cm

Luego $\boxed{\beta = 56°\ 18'\ 36''}$ $\boxed{\Phi = 33°\ 41'\ 24''}$ $\boxed{c = 7{,}21\text{ cm}}$

Ejemplo 2

Resolver el triángulo rectángulo que tiene 5 cm de hipotenusa y uno de los catetos mide 3 cm.



Datos: c = 5 cm a = 3 cm Φ = ?

Incógnitas: Φ = ? b = ? β = ?

Solución

Calculemos el valor del ángulo Φ aplicando la relación trigonométrica seno, para lo cual escribimos que sen $\Phi = \frac{a}{c}$ en la cual sutituimos a y c por sus valores, quedándonos que:

sen $\Phi = \frac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}6$, de donde $\boxed{\Phi = 36°\ 52'\ 12''}$

El ángulo β lo calculamos restando de 90° el valor de Φ

$$\beta = 90° - 36°\ 52'\ 12'' \Longrightarrow \boxed{\beta = 53°\ 7'\ 48''}$$

Para calcular el lado b lo hacemos aplicando el teorema de Pitágoras o por una relación trigonométrica de cualquiera de los ángulos β o Φ. Aquí lo haremos aplicando la definición de cos Φ.

$\cos \Phi = \dfrac{b}{c}$ de donde $b = c \cdot \cos \Phi$. Sustituyendo por los valores de c y Φ nos queda que:

$b = 5\text{ cm} \cdot \cos 36° \; 52' \, 12''$ $\longrightarrow$ $\boxed{b = 3{,}99\text{ cm}}$

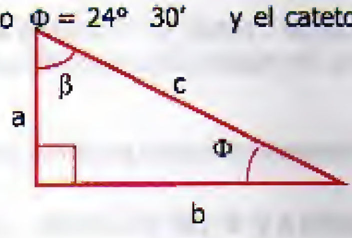
Segundo caso. Conocidos un lado y un ángulo agudo

Dependiendo del lado conocido, si es la hipotenusa o un cateto, se pueden plantear tres situaciones diferentes:

- Se conoce un ángulo agudo y el cateto opuesto.
- Se conoce un ángulo agudo y el cateto adyacente.
- Se conoce la hipotenusa y un ángulo agudo.

Ejemplo 1

Resolver un triángulo rectángulo que tiene un ángulo agudo $\Phi = 24° \; 30'$ y el cateto opuesto tiene una longitud de 6 cm.



Datos: $\Phi = 24° \; 30'$ $a = 6\text{ cm}$

Incógnitas: $b = ?$ $c = ?$ $\beta = ?$

Solución

Sabemos que resolver un triángulo rectángulo significa deducir el valor de los elementos desconocidos partiendo de los datos conocidos.

Si deseamos calcular primero la medida de la hipotenusa, utilizamos una de las relaciones seno o cosecante del ángulo Φ, y si deseamos calcular la longitud del otro cateto empleamos la relación tangente o cotangente.

Calculemos primero la medida de la hipotenusa a través de la relación $\operatorname{sen} \Phi = \dfrac{a}{c}$ de donde:

$c = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\Phi}$. Sustituyendo a y Φ por sus valores nos queda que $c = \dfrac{6\text{ cm}}{\operatorname{sen} 24°30'}$

$$\boxed{c = 14{,}47\text{ cm}}$$

Para calcular la medida del otro cateto usamos la relación $\operatorname{tag} \Phi = \dfrac{a}{b}$ de la cual despejamos b, quedándonos que: $b = \dfrac{a}{\operatorname{tag}\Phi}$. Sustituyendo a y Φ por sus valores nos queda:

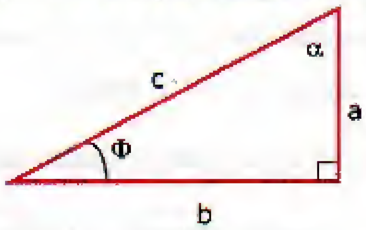
$b = \dfrac{6\text{ cm}}{\operatorname{tag} 24°30'}$ $\longrightarrow$ $\boxed{b = 13{,}17\text{ cm}}$

Para calcular el ángulo β usamos la relación $\beta + \Phi = 90°$ de donde $\beta = 90° - \Phi$

$\beta = 90^\circ - 24^\circ\ 30'$ → $\boxed{\beta = 65^\circ\ 30'}$

Ejemplo 2

Resolver el triángulo rectángulo que tiene un ángulo agudo $\Phi = 42^\circ$ y el cateto adyacente mide 6 cm.



Datos: $\Phi = 42^\circ$ $b = 4$ cm

Incógnitas: $\alpha = ?$ $a = ?$ $c = ?$

Determinemos la longitud del lado c

Usamos la relación $\cos\Phi = \dfrac{b}{c}$ de donde despejando c nos queda que $c = \dfrac{b}{\cos\Phi}$

Sustituyendo en b y Φ por sus valores nos queda que $c = \dfrac{4\text{ cm}}{\cos 42^\circ} = \dfrac{4\text{ cm}}{0{,}7431} = 5{,}38$ cm

Calculemos la longitud del lado a

Usamos la relación $\operatorname{sen}\Phi = \dfrac{a}{c}$ de donde al despejar a nos queda que $a = c.\operatorname{sen}\Phi$.

Sustituyendo a y Φ por sus valores nos queda que $a = 5{,}38\text{ cm} . \operatorname{sen} 42^\circ = 3{,}59$ cm

$\boxed{a = 3{,}59\text{ cm}}$

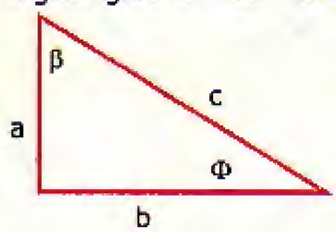
Para determinar el ángulo α lo hacemos a través de la relación $\alpha + 40^\circ = 90^\circ$ de donde despejamos $\alpha = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

$\alpha = 50^\circ$

Luego $\boxed{c = 5{,}38\text{ cm} \qquad a = 3{,}59\text{ cm} \qquad \alpha = 50^\circ}$

Ejemplo 3

Resolver el triángulo cuya hipotenusa mide 10 cm y el ángulo agudo $\Phi = 26^\circ$ 30□ 34"



Datos: $\Phi = 26^\circ\ 30'\ 34''$ $c = 10$ cm

Incógnitas: β , a, b

Solución

Para determinar el ángulo β lo despejamos de la relación $\Phi + \beta = 90^\circ$ de donde $\beta = 90^\circ - \Phi$

$\beta = 90^\circ - 26^\circ\ 30'\ 34''$ $\longrightarrow$ $\beta = 63^\circ\ 30'\ 26''$

Calculemos la longitud del lado a

Usamos la relación sen $\Phi = \dfrac{a}{c}$ de donde al despejar a nos queda que $a = c \cdot \text{sen } \Phi$

$a = 10 \text{ cm} \cdot \text{sen } 26^\circ\ 30'\ 34'' = 4{,}46 \text{ cm}$ $\boxed{a = 4{,}46 \text{ cm}}$

Calculemos la longitud del lado b

Usamos la relación $\cos \Phi = \dfrac{b}{c}$ de donde al despejar b nos queda: $b = c \cdot \cos \Phi$

$b = 10 \text{ cm} \cdot \cos 26^\circ\ 30'\ 8'' = 8{,}95 \text{ cm}$ $\boxed{b = 8{,}95 \text{ cm}}$

La longitud de b también hemos podido haberla calculado usando el teorema de Pitágoras

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \longrightarrow b = \sqrt{(10 \text{ cm})^2 - (4{,}46 \text{ cm})^2} = \sqrt{100 \text{ cm}^2 - 19{,}8916 \text{ cm}^2} = \sqrt{80{,}1084 \text{ cm}^2}$$

$b = 8{,}95 \text{ cm}$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1.Resolver los siguientes triángulos rectángulos tomando en cuenta los siguientes datos:

a) Angulo $\alpha = 62^\circ$. Cateto opuesto: 240 cm

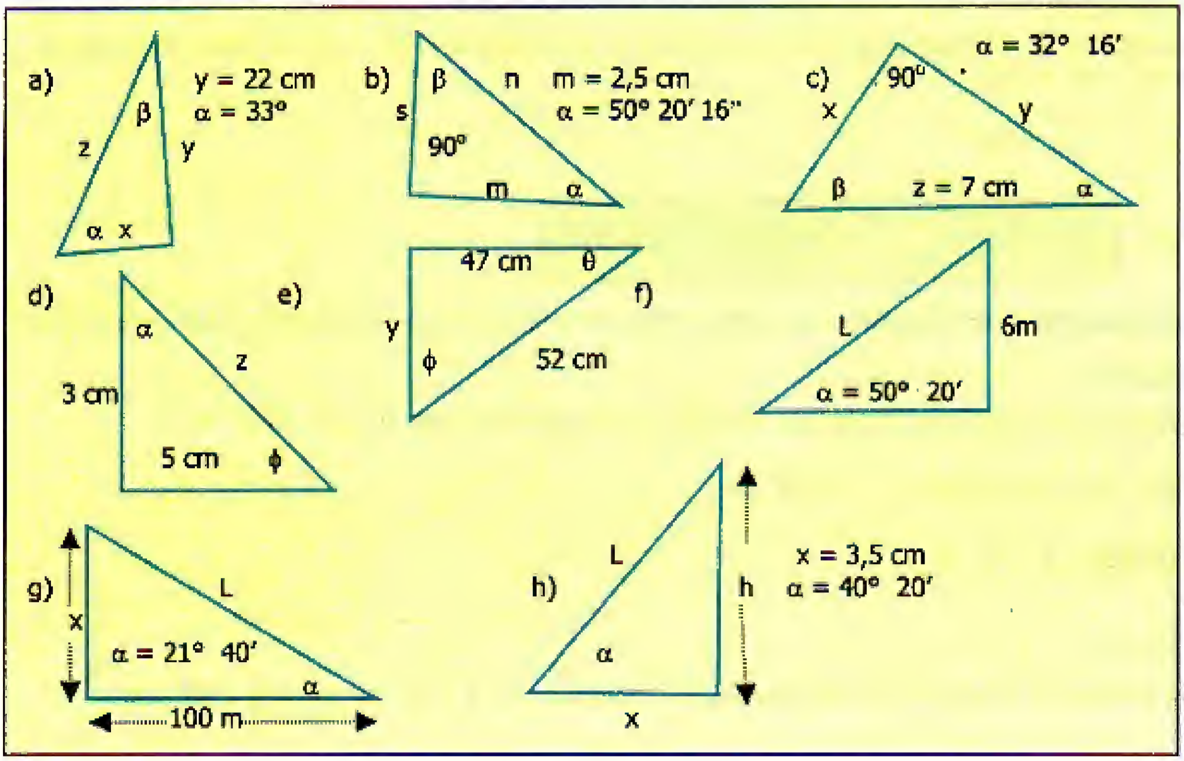
b) Angulo $\alpha = 40^\circ\ 30'$. Cateto adyacente: 30 cm

c) Angulo $\alpha = 62^\circ\ 30'$. Hipotenusa: 4 cm

d) Catetos 6 cm, 8 cm

e) Cateto 8 cm, hipotenusa 12 cm

2. En los siguientes triángulos se indican los datos conocidos. Calcula el valor de las incógnitas

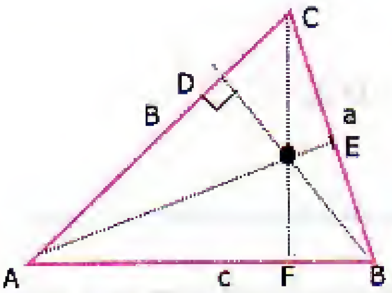


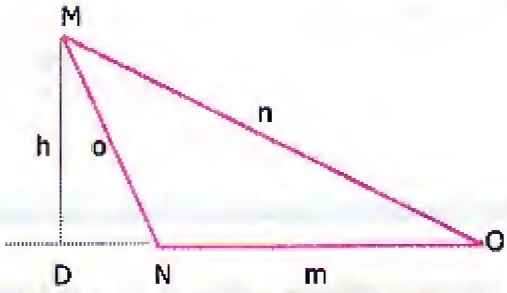
Respuestas

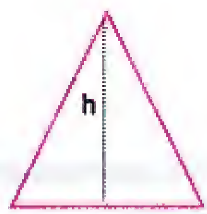
1. a) Hip: 272,108 cm. cat: 127,618 $\beta = 28°$ Área: 15.314,66 cm^2
   b) Hip: 39,473 cm cat op: 25,617 $\beta = 49° 30'$ Área: 384,255 cm^2
   c) cat: 3,548 cm cateto: 1,844 cm $\beta = 27° 30'$ Área: 3,271 cm^2
   d) 53° 7' 48" y 36° 52' 12" Área: 24 cm^2
   e) cat: 8,94 cm $\alpha = 41° 50'$ $\beta = 48° 10'$ Área: 35,76 cm^2
2. a) x = 33,889 z = 40,41 cm $\beta = 57°$ b) n = 3,91 cm s = 3,015 cm $\beta = 39° 39' 44"$
   c) y = 5,92 cm x = 3,737 cm $\beta = 57° 44'$
   d) z = 5,83 cm $\phi = 30° 49"$ $\alpha = 59° 2' 11"$
   e) $\theta = 25° 19' 54"$ $\phi = 64° 40' 06"$ y = 47 cm
   f) L = 7,79 m g) x = 39,72 m L = 107,599 m h) h = 2,97 cm L = 4,59 cm

ALTURAS DE UN TRIÁNGULO

Se llama **altura** de un triángulo al segmento perpendicular a un lado trazado desde el vértice opuesto. El punto donde concurren las rectas que pertenecen a las alturas se llama **ortocentro.**







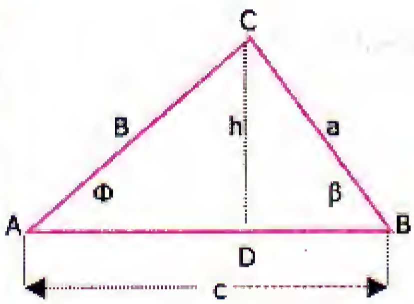
En el triángulo ABC se tiene que $\overline{BD}$ es la altura respecto al lado b. $\overline{AE}$ es la altura respecto al lado a. $\overline{CF}$ es la altura respecto al lado c

En el triángulo MNO se tiene que $\overline{MD}$ es la altura del triángulo respecto al lado m. Esta altura se traza perpendicular a la prolongación del lado m.

Nótese, que la altura trazada en un triángulo determina en él dos triángulos rectángulos. En la figura del centro se tienen los triángulos MDO y MDN.

CÁLCULO DEL ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Consideremos el triángulo ABC mostrado en la figura de la derecha. Sea h la altura del triángulo respecto al lado c, siendo c la base.
Tratemos de encontrar la expresión para calcular el área.
Por geometría sabemos que el área de un triángulo como el mostrado en la figura viene dada por: $A = \dfrac{\text{base.altura}}{2} = \dfrac{c\,.\,h}{2}$ ....(I)



Si observamos el triángulo ACD se tendrá que sen $\Phi = \frac{h}{b}$ de donde $h = b.\text{sen } \Phi$ ......(II)

Sustituyendo la expresión (II) en (I) se tendrá que $\boxed{A = \frac{c.b \text{ sen } \Phi}{2}}$

De forma análoga se obtiene que $\boxed{A = \frac{a.c.\text{sen } \Phi}{2}}$

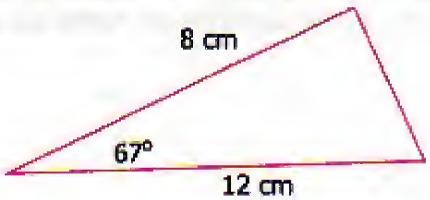
De acuerdo a lo deducido podemos escribir:

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de sus lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos.

Ejemplo 1

En un triángulo, dos de sus lados miden 8 y 12 cm respectivamente. El ángulo comprendido entre ellos es 67°. ¿Cuál es el área?.

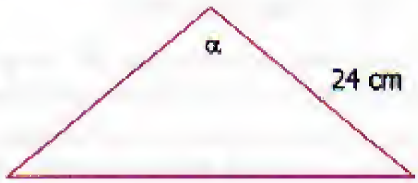
$$A = \frac{8 \text{ cm} . 12 \text{ cm} . \text{sen } 67°}{2} = 88{,}37 \text{ cm}^2$$



Ejemplo 2

Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 24 cm y el ángulo comprendido entre ellos mide 28° 32' 24" . ¿Cuál es el área de dicho triángulo?.

$\alpha = 28° \, 32' \, 24''$



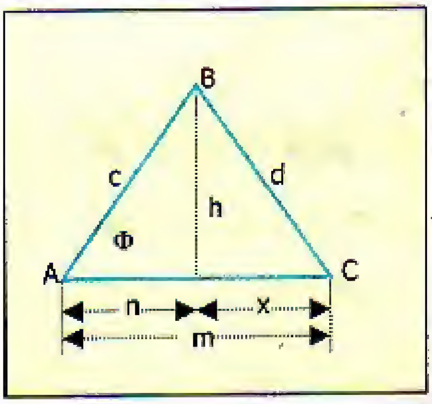
$$A = \frac{24 \text{ cm} . 24 \text{ cm}. \text{sen } 28°32'24''}{2}$$

$A = 137{,}60 \text{ cm}^2$

Problemas resueltos

Problema 1

Observemos el triángulo de la figura , el cual es isósceles. AB = BC



Los segmentos AB y BC son de igual longitud

$\overline{AB} = 3{,}5$ cm $\quad \overline{AC} = m = 6$ cm $\quad \Phi = 35°\ 20'$

Calcular:

a) La altura h
b) El àrea del triángulo
c) El perímetro

Solución

a) Cálculo de la altura

La altura h trazada en un triángulo isósceles divide a la base AC en dos segmentos de la misma longitud. Esto nos indica que n = 3 cm y x = 3 cm.

Apliquemos en el triángulo ADC la relación $\operatorname{sen}\Phi = \frac{h}{AB}$, de donde h = AB . sen Φ

Sustituyendo AB = 3,5 cm y Φ = 35° 20′ se tiene que:

$$h = 3{,}5 \text{ cm} \cdot \operatorname{sen} 35°\ 20'$$

$$\mathbf{h = 2{,}024\ cm}$$

b) **Calculemos el área**

El área viene expresada por la relación siguiente: $A = \frac{m \cdot c \operatorname{sen}\Phi}{2}$

Sustituyendo m, c y Φ por sus valores se tendrá que $A = \frac{6 \text{ cm} \cdot 3{,}5 \text{ cm} \operatorname{sen} 35°20'}{2} = 6{,}07 \text{ cm}^2$

El perímetro no es más que la suma de los lados p = m + c + d = 6 cm + 3,5 cm + 3,5 cm

$$\boxed{P = 13 \text{ cm}}$$

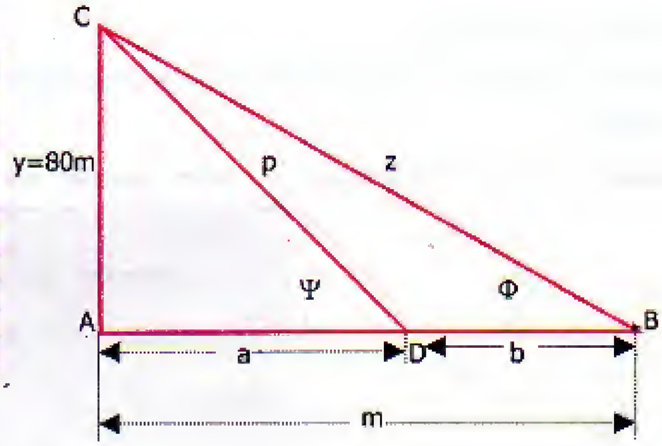
Problema 2

En el triángulo de la derecha se tiene que:
$y = 80$ m

$\Phi = 23°\,38'$

$\Psi = 28°\,16'$

Calcular: b, z, área, perímetro



Solución

Calculemos (a + b)

En el triángulo ABC aplicamos la relación $\tan \Phi = \dfrac{y}{(a+b)}$ de donde $a+b = \dfrac{y}{\tan\Phi}$ ....(I)

Sustituyendo en la expresión (I) por sus valores se tendrá que:

$$a + b = \frac{80\text{ m}}{\tan\Phi} = \frac{80\text{ m}}{\tan 23°38'} = 182{,}82\text{ m}$$

$$a + b = 182{,}82\text{ m}..........(I)$$

Calculemos a

Si aplicamos tag Ψ en el triángulo ADC se tendrá que: $\tan\Psi = \dfrac{y}{a}$ de donde $a = \dfrac{y}{\tan\Psi}$ .....(II)

Sustituyendo en la expresión (II) por sus valores se tiene que:

$$a = \frac{80\text{ m}}{\tan 28°16'} \longrightarrow a = 148{,}78\text{ m}$$

Despejando b de la expresión (I) nos queda que:

$$b = 182{,}82\text{ m} - a$$

$$b = 182{,}82\text{ m} - 148{,}78\text{ m} \quad \text{(sustituyendo por el valor de a)}$$

$$\boxed{b = 34{,}04\text{ m}}$$

Calculemos z

Para calcular z aplicamos la relación sen Φ en el triángulo ABC, quedándonos que:

$\operatorname{sen}\Phi = \dfrac{y}{z}$ de donde al despejar z nos queda que $z = \dfrac{y}{\operatorname{sen}\Phi}$

Sustituyendo por sus valores se tiene que:

$$z = \frac{80\text{ m}}{\text{sen } 23°38'} \longrightarrow z = 199{,}56\text{ m} \longrightarrow \boxed{z = 199{,}56}$$

Calculemos el área

$$A = \frac{(a+b)\,.\,z\,.\,\text{sen }\Phi}{2} = \frac{182{,}82\text{ m}\,.\,199{,}56\text{ m}\,.\,\text{sen } 23°38'}{2} = 7.312{,}803\text{ m}^2$$

$$\boxed{A = 7.312{,}803\text{ m}^2}$$

Cálculo de la longitud CD =p

Para calcular a la longitud de p aplicamos la relación sen Ψ en el triángulo ADC y espejar p

$$\text{sen}\Psi = \frac{y}{p} \quad \text{de donde } p = \frac{y}{\text{sen}\Psi} = \frac{80\text{ m}}{\text{sen } 28°16'} \longrightarrow \boxed{p = 168{,}93\text{ m}}$$

Calculemos el perímetro.

El perímetro es la suma de los lados del triángulo P = m + y + z ....(A)

Si observamos el triángulo notaremos que:

$m = a + b = 182{,}82$ m $\quad y = 80$ m $\quad z = 199{,}56$ m

Sustituyendo los valores de m, y , z en la expresión P = m + y + z se tiene que:

$$P = 182{,}82\text{ m} + 80\text{ m} + 199{,}56\text{ m}$$

$$\boxed{P = 462{,}38\text{ m}}$$

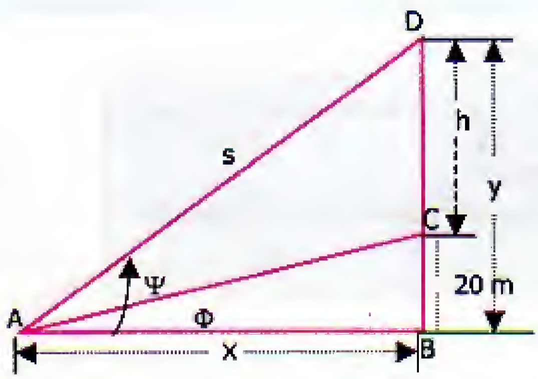
Problema 3

En el triángulo de la figura se tiene que:

$\Phi = 12°\,15'$ $\qquad \overline{BC} = 20$ cm

$\Psi = \angle BAD = 68°\,25'$

Calcular: y, s, n



Solución

Para calcular y hacemos uso del triángulo ABD y aplicamos la relación tag Ψ

$\tan\Psi = \dfrac{y}{x} \longrightarrow y = x \tan\Psi \longrightarrow y = x \cdot \tan 68^\circ 25'$ ....(1)

En la expresión (1) no conocemos la longitud x, la cual puede calcularse aplicando la relación tag Φ en el triángulo ABC.

$\tan\Phi = \dfrac{20\text{ m}}{x} \longrightarrow x = \dfrac{20\text{ m}}{\tan\Phi} = \dfrac{20\text{ m}}{\tan 12^\circ 15'} \longrightarrow \boxed{x = 92{,}11\text{ m}}$

Sustituyendo el valor de x en la expresión (1) nos queda que:

$$y = 92{,}11\text{ m} \cdot \tan 68^\circ 25'$$

$$\boxed{y = 232{,}84\text{ m}}$$

Calculemos la longitud s = DA

Para calcular la longitud de s hacemos uso del triángulo ABD y aplicamos la relación sen Ψ

$$\operatorname{sen}\Psi = \frac{y}{s}$$

Si despejamos s y sustituimos por los valores de Ψ y los valores de y nos queda que:

$$s = \frac{y}{\operatorname{sen}\Psi} = \frac{232{,}84\text{ m}}{\operatorname{sen} 68^\circ 25'}$$

$$\boxed{s = 250{,}397\text{ m}}$$

Para calcular n bastará con darnos cuenta que n + 20 m = y

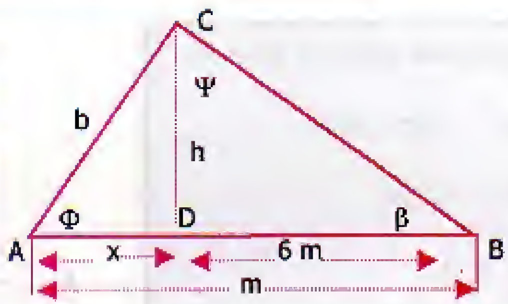
$$n = y - 20\text{ m}$$

$$n = 232{,}84\text{ m} - 20\text{ m}$$

$$\boxed{n = 212{,}84\text{ m}}$$

Problema 4

En el triángulo de la figura se tiene que:
$\Phi = 37^\circ 15' 22''$
$\beta = 21^\circ 17' 12''$
Calcular las longitudes de x, m y el valor de Ψ



Solución

Calculemos la altura h

En el triángulo BCD aplicamos la relación $\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{6\text{ m}} \longrightarrow h = 6\text{ m} \cdot \operatorname{sen}\beta$

$h = 6\text{ m} \cdot \operatorname{sen} 21^\circ\, 17'\, 12''$

$\boxed{h = 2{,}178\text{ m}}$

Calculemos la longitud de b

En el triángulo ACD aplicamos la relación $\operatorname{sen}\Phi = \frac{h}{b} \longrightarrow b = \frac{h}{\operatorname{sen}\Phi} = \frac{2{,}178\text{ m}}{\operatorname{sen} 37^\circ 15' 22''}$

$\boxed{b = 3{,}60\text{ m}}$

Calculemos la longitud de x

En el triángulo ACD aplicamos la relación $\cos\Phi = \frac{x}{b} \longrightarrow x = b \cdot \cos\Phi$

$x = 3{,}60\text{ m} \cdot \cos 37^\circ\, 15'\, 22''$

$\boxed{x = 2{,}865\text{ m}}$

Calculemos la longitud de m

Si observamos la base del triángulo escribimos que $m = x + 6\text{ m} = 2{,}865\text{ m} + 6\text{ m}$

$\boxed{m = 8{,}865\text{ m}}$

Calculemos el valor del ángulo Ψ

En el triángulo ACD se observa que $\Psi + \Phi = 90^\circ$

Si despejamos Ψ obtendremos que

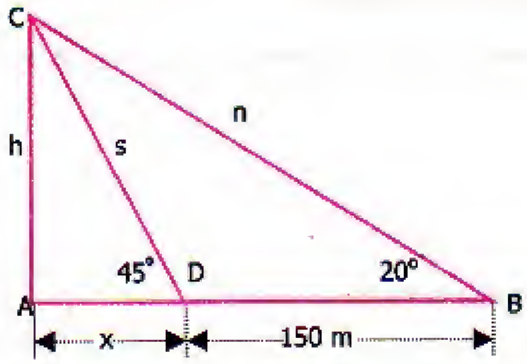
$\Psi = 90^\circ - \Phi = 90^\circ - 37^\circ\, 15'\, 22''$

$\boxed{\Psi = 52^\circ\, 44'\, 38''}$

Problema 5

Observa el triángulo de la figura y calcula:

La longitud de x
La longitud de h
La longitud de n
La longitud de s
El área del triángulo ABC



Solución

En el triángulo ACD se tiene que tag 45° = $\frac{h}{x}$ de donde h = x . tag 45° ....(I)

En el triángulo ABC se tiene que tag 20° = $\frac{h}{x + 150\text{ m}}$ de donde al despejar h nos queda:

h = (x + 150m). tag 20° ....(II)

De (I) y (II) se deduce por transitividad de las igualdades que:

x tag 45° = (x + 150) tag 20°

x tag 45° = x tag 20° + 150 tag 20° (Aplicando propiedad distributiva)

x tag 45° - x tag 20° = 150 tag 20° (Agrupando los términos con x)

x (tag 45° - tag 20°) = 150 tag 20° (Tomando x factor común)

$$x = \frac{150 \text{ tag } 20^\circ}{\text{tag } 45^\circ - \text{tag } 20^\circ}$$ (Despejando x)

$\boxed{x = 85{,}84 \text{ m}}$

Cálculo de la longitud de h

Sustituimos el valor de x en la expresión (I), quedándonos que:

h = 85,84 m . tag 45° → $\boxed{h = 85{,}84 \text{ m}}$

Cálculo de la longitud de n

En el triángulo ABC se tiene que sen 20° = $\frac{h}{n}$ de donde n = $\frac{85{,}84 \text{ m}}{\text{sen } 20^\circ}$ → n = 250,98 m

Cálculo de la longitud de s

En el triángulo ADC se tiene que

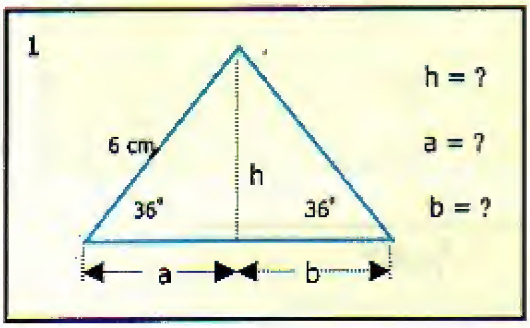
$$\text{sen } 45^\circ = \frac{h}{s} \quad \text{de donde } s = \frac{h}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{85{,}84 \text{ m}}{\text{sen } 45^\circ} \longrightarrow s = 121{,}40 \text{ m} = BC$$

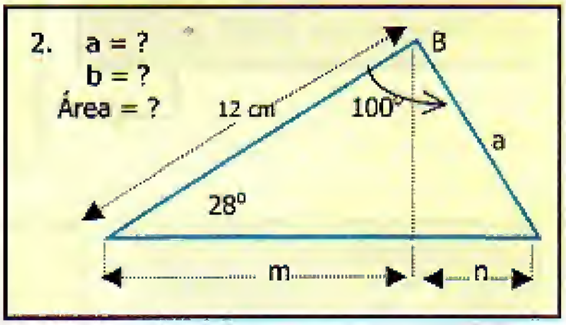
Calculemos el área del triángulo ABC

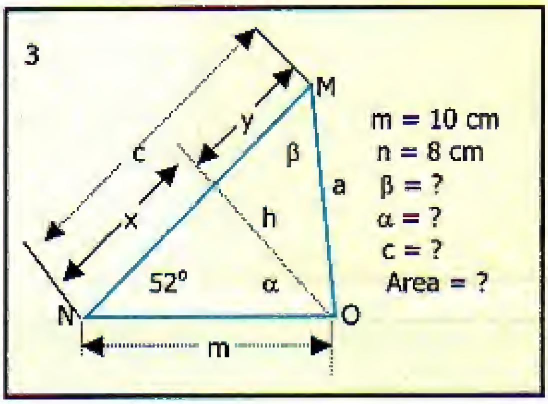
$$A = \frac{AB \,.\, BC \,.\, \text{sen } 20^\circ}{2} \qquad AB = 150 \text{ m} + x = 150 \text{ m} + 85{,}84 \text{ m} = 235{,}84 \text{ m}$$

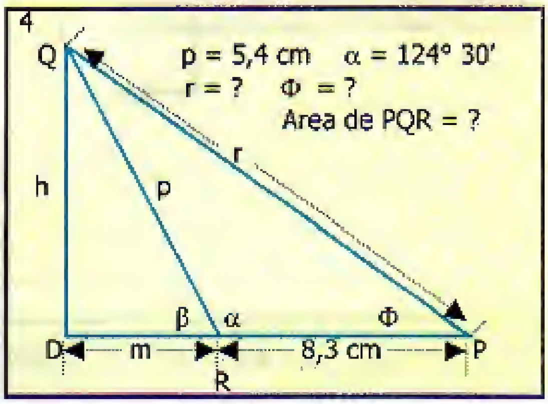
$$A = \frac{235{,}84 \text{ m} \,.\, 250{,}98 \text{ m} \,.\, \text{sen } 20^\circ}{2} \longrightarrow \boxed{A = 10122{,}278 \text{ m}^2}$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

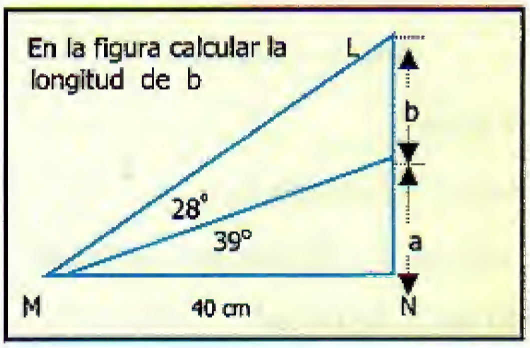




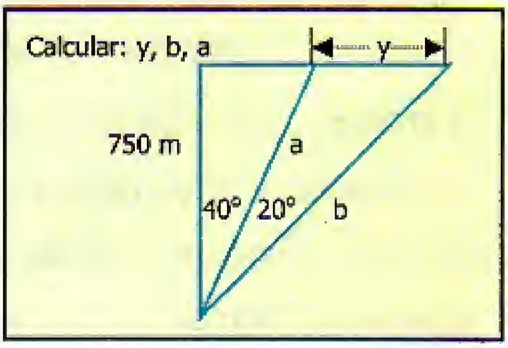




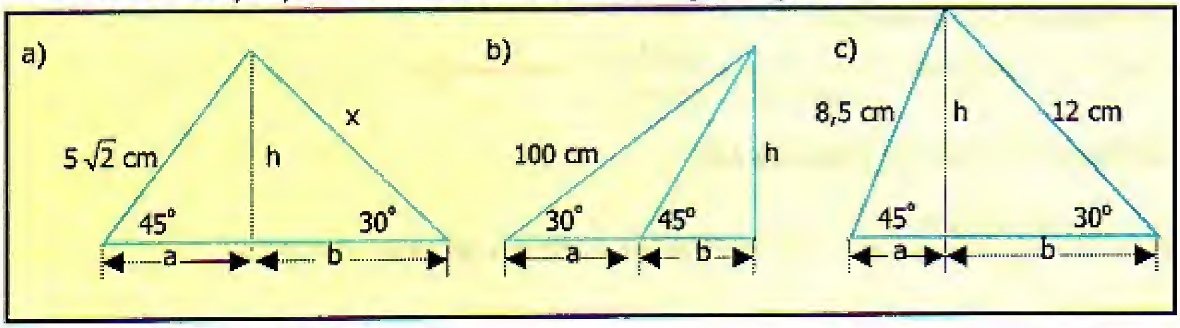
5.



6.



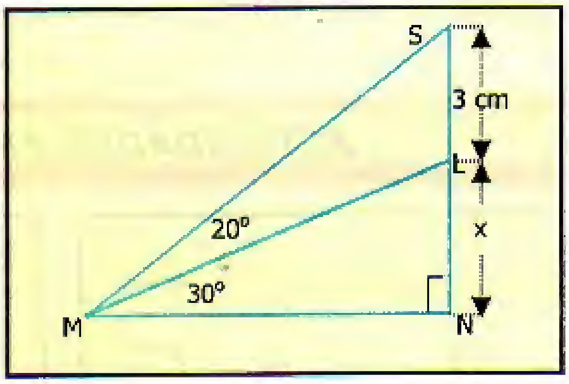
7. Calcula el área y el perímetro en cada uno de los triángulos siguientes:



8.

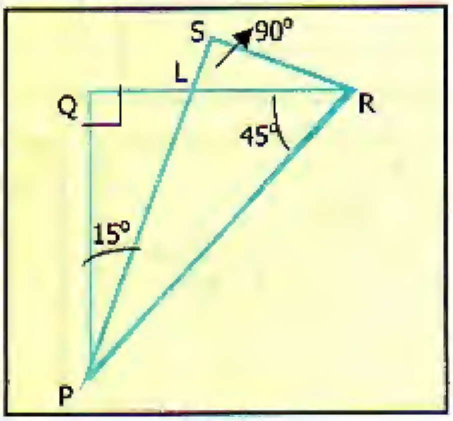
Observa el triángulo mostrado en el lado derecho, el cual consta de dos triángulos

Calcula el perímetro de cada uno los triángulos MNL y MLS



9.

En el triángulo de la derecha calcular el valor del perímetro del triángulo PLR. Calcular el área del triángulo LSR



Respuestas

1. h = 3,527 cm a = 4,854 cm b = 4,854 cm
2. a = 17 cm b = 15 cm Área = 42,19 cm^2
3. β = 80° 3′ 49″ c = 7,53 cm α = 47° 56′ 11″ Área = 29,70 cm^2
4. r = 12,20 cm Φ = 21° 23′ 25″ Área = 18,47 cm^2
5. LS = 61,84 cm
6. y = 669,72 m b = 1500 m a = 979,05 m
7. a) 27,73 cm 26,65 cm^2 b) 136,6 cm 2165 cm^2 c) 36,88 cm 49,17 cm^2
8. 13,329 cm y 16,22 cm
9. 8,9987 cm y 0,5359 cm^2

En el triángulo ACD se tiene que $\tan 32° 18' = \frac{h}{x}$ de donde $h = x \cdot \tan 32° 18'$ ....(I)

En el triángulo rectángulo BCD se aplica la relación $\tan 23° 42' = \frac{h}{50 + x}$. Despejando h se tiene que: $h = (50 + x) \tan 23° 42'$ ....(II)

Sustituyendo (II) en (I) se tiene que:

$$x \cdot \tan 32° 18' = (50 + x) \tan 23° 42'$$

$$x \cdot \tan 32° 18' = 50 \tan 2° 42' + x \tan 23° 42' \quad \text{(propiedad distributiva)}$$

$$x \cdot \tan 32° 18' - x \tan 23° 42' = 50 \tan 23° 42' \quad \text{(ubicando x en el primer miembro)}$$

$$x (\tan 32° 18' - \tan 23° 42') = 50 \tan 23° 42' \quad \text{(tomando x factor común)}$$

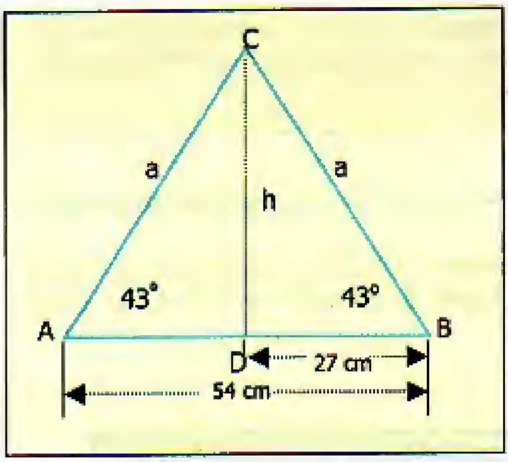
$$x = \frac{50 \tan 23° 42}{\tan 32° 18 - \tan 23° 42} = 113{,}6 \text{ m}$$

Sustituyendo el valor de x en (I) nos queda $h = 113{,}6 \text{ m} \cdot \tan 32° 18'$

$$\boxed{h = 71{,}81 \text{ m}}$$

Problema 2 (Aplicaciones a la geometría)
La base de un triángulo isósceles mide 54 cm y los ángulos de la base 42°. Calcular las longitudes de los lados iguales, de la altura. Calcular además el área.

Solución



El triángulo mostrado corresponde a las condiciones del problema.

Recordemos que en un triángulo isósceles dos lados tienen la misma longitud.

Debemos calcular las longitudes de a y de h. Esta última representa la altura.

La mitad de la longitud de la base mide 27 cm, puesto que la base mide 27 cm.

En el triángulo BCD se aplican las dos relaciónes trigonométricas dadas así:

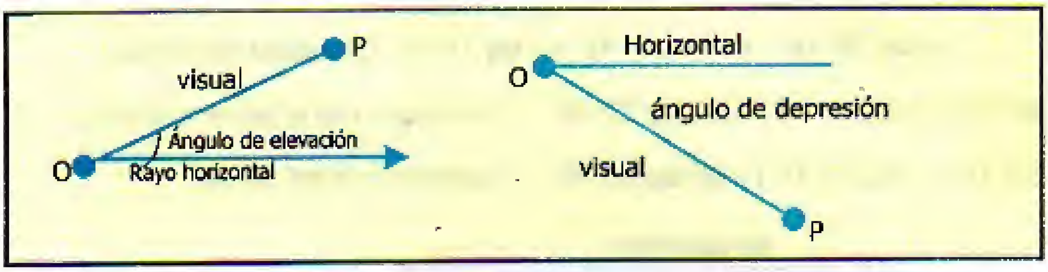
$$\tan 43° = \frac{h}{27 \text{ cm}} \text{ de donde } h = 27 \text{ cm} \cdot \tan 43° \longrightarrow h = 25{,}18 \text{ cm}$$

$$\cos 43° = \frac{27 \text{ cm}}{a} \text{ de donde } a = \frac{27 \text{ cm}}{\cos 43°} \longrightarrow \boxed{a = 36{,}92 \text{ cm}}$$

4.13 *Problemas de aplicación que impliquen triángulos rectángulos*

Angulo de elevación y ángulo de depresión

Se denomina **visual** de P al segmento de recta dirigido desde un punto de observación "O" a un punto P observado. En las figuras se obesrvan las visuales de P desde el punto O.



Se llama **ángulo de elevación** de P al ángulo con vértice en O, formado por un rayo horizontal y la visual de P. Si el punto P se ubica por debajo de O, el ángulo se llama **ángulo de depresión**.

Procedimientos para la resolución de los problemas

Lectura del enunciado. No debe hacerse una lectura ligera del problema, sino que debe prestarse atención a la situación planteada, haciendo un gráfico donde se ilustren los datos del problema y la incógnita que se tiene.

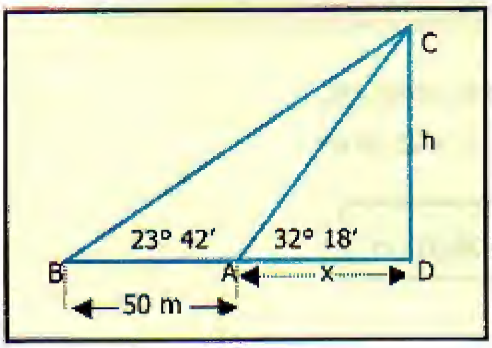
Análisis del problema: Antes de comenzar a desarrollar las operaciones debe reflexionarse sobre el proceso matemático que se sigue para encontrar la respuesta.

Planteo y resolución de las operaciones: Cuando se tenga bien claro el camino que nos conduce a la solución del problema, se plantean y se resuelven las operaciones hasta encontrar el valor de la incógnita dada.

Problema 1

En un punto A, el ángulo de elevación a la cima de una colina es 32° 18□ . Ubicado en la misma recta horizontal que A y al pie de la colina, a 50 m de A, el ángulo de elevación es 23° 42□ . ¿Cuál es la altura de la colina?.

Solución



En el gráfico se muestran las condiciones del problema.

El punto C representa la cima de la colina.
h representa la altura de la colina.

Sea x la distancia comprendida desde A hasta el pie de la colina D.

El área viene dada por $A = \dfrac{27\text{ cm} \cdot 36{,}92\text{ cm} \cdot \text{sen } 43^\circ}{2}$

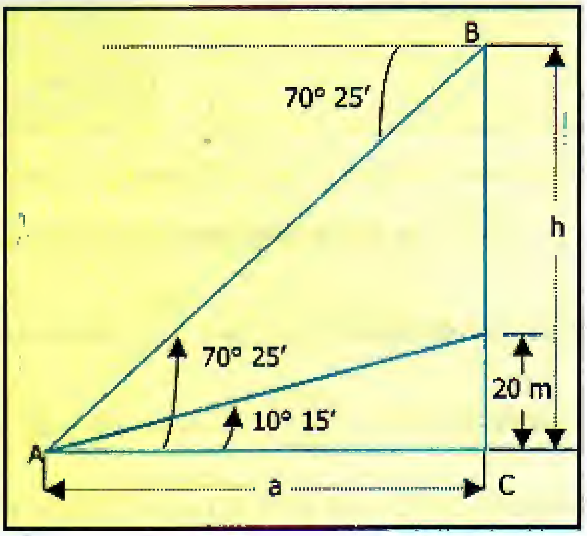
$$\boxed{A = 339{,}9\text{ cm}^2}$$

Problema 3 (Aplicaciones a la navegación)

Desde un barco se ve una faro con un ángulo de elevación de 70° 25′ y desde un avión, que vuela exactamente encima del faro, se ve el barco con una ángulo de depresión de 70° 25′ . Si el faro tiene una altura de 20 m. ¿A qué altura está el avión sobre el nivel del mar?.

Solución

Observemos la figura que muestra las condiciones del problema.
Sea B el punto donde está ubicado el avión.
Sea A, el punto donde está ubicado el barco.
Sea h la altura a la cual se encuentra el avión sobre el nivel del mar ($\overline{BC}$).
Sea a la distancia medida desde el barco hasta la base del faro.
La altura del faro es $\overline{CP}$ = 20 m



Si usamos el triángulo rectángulo ACB se tendrá que $\text{tag } 70^\circ\, 25' = \dfrac{h}{a}$

Si despejamos h nos queda que h = a . tag 70° 25′ ....(I)

Para determinar la longitud de a usamos el triángulo ACP y aplicamos la relación siguiente:

$$\text{tag } 10^\circ\, 15' = \frac{20\text{ m}}{a} \quad \text{de donde } a = \frac{20\text{ m}}{\text{tag}10^\circ 15} \longrightarrow \boxed{a = 110{,}6\text{ m}}$$

Reemplazamos este valor de a en (I), quedándonos que:

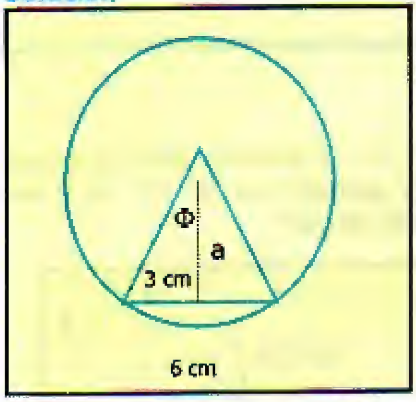
$$h = 110{,}6\text{ m} \cdot \text{tag } 70^\circ\, 25'$$

$$\boxed{h = 310{,}89\text{ m}}$$

Problema 4

Calcular el área de un decágono regular de 6 cm de lado.

Solución



Observaciones previas

El área de un polígono viene dada por la expresión

$A = \frac{p.a}{2}$ ....(I)

p representa el perímetro y **a** la apotema.

La apotema es el segmento que une el centro de un polígono con el punto medio de cada lado.

Para calcular el área nos falta calcular el valor de la apotema.

Si observamos la figura se tendrá la siguiente relación trigonométrica:

$\text{tag } \Phi = \frac{3 \text{ cm}}{a}$, de donde despejando a se tiene que $a = \frac{3 \text{ cm}}{\text{tag } \Phi}$ .... (II)

Para conocer Φ sabemos que $2\Phi = \frac{360^\circ}{n}$ donde n es el número de lados del polígono.

En nuestro caso $2\Phi = \frac{360^\circ}{10} \longrightarrow 2\Phi = 36^\circ \longrightarrow \Phi = 18^\circ$

Sustituyendo por $\Phi = 18^\circ$ en (II) se tendrá que $a = \frac{3 \text{ cm}}{\text{tag} 18^\circ} \longrightarrow \boxed{a = 9{,}23 \text{ cm}}$

Calculemos el área en la expresión (I) donde el perímetro es $p = 6 \text{ cm} . 10 \longrightarrow p = 60 \text{ cm}$

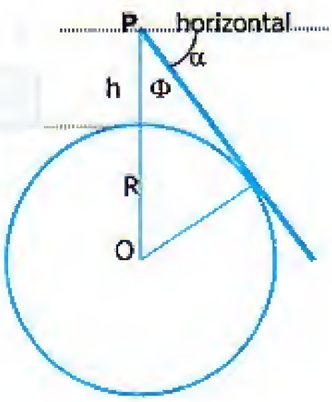
Luego el área es $A = \frac{60 \text{ cm} . 9{,}23 \text{ cm}}{2} \longrightarrow \boxed{A = 276{,}9 \text{ cm}^2}$

Problema 5

Un piloto observa el extremo de la tierra con un ángulo de depresión de 0° 32′ 18" . Calcular a qué altura se encuentra la nave que pilotea. El radio de la tierra es 6.370 Km

Solución

Observemos la figura de la derecha
P: punto de ubicación de la nave
h: altura desde la superficie de la tierra hasta el punto P.
R: es el radio de la tierra.
PL: visual dirigida desde P.
α: ángulo de depresión = 0° 32′ 18"



Determinemos el valor de Φ

$\Phi + \alpha = 90^\circ$ de donde $\Phi = 90^\circ - \alpha$

$\Phi = 90^\circ - 0^\circ\ 32'\ 18''$ → $\boxed{\Phi = 89^\circ\ 27'\ 42''}$

En el triángulo rectángulo POL se tiene que $\operatorname{sen}\Phi = \dfrac{R}{R+h}$ de donde $R = (R+h)\operatorname{sen}\Phi$

Si tratamos de despejar h se tendrá que:

$R = R\operatorname{sen}\Phi + h\operatorname{sen}\Phi$ (Aplicando propiedad distributiva)

$R - R\operatorname{sen}\Phi = h\operatorname{sen}\Phi$ (Aislando el término que contiene h en el segundo miembro)

$R(1 - \operatorname{sen}\Phi) = h\operatorname{sen}\Phi$ (Tomando R factor común)

$h = \dfrac{R(1-\operatorname{sen}\Phi)}{\operatorname{sen}\Phi}$ (Despejando h)

Sustituyendo Φ y R por sus valores tenemos:

$h = \dfrac{6.370\ \text{Km}\,(1 - \operatorname{sen} 89^\circ 27'\ 42'')}{\operatorname{sen} 89^\circ 27'\ 42''}$ → $h = 0{,}281179$ Km → $\boxed{h = 281\ \text{Km}}$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Un topógrafo encuentra que el ángulo de elevación del asta de una bandera es 62° 32′ 15'' . La observación se realiza desde una altura de 1,8 m sobre el nivel del piso y a 12 m del asta. Calcular la altura del asta. **R:** 24,89 m

2. Un vigilante observa desde la ventana de un faro a una altura de 32 m sobre el nivel del mar un barco con un ángulo de depresión de 27° 18′ 32'' . Calcular la distancia a la cual se encuentra el barco de la base del faro. **R:** 61,9 m.

3. Un astronauta observa desde su nave el extremo de la tierra con un ángulo de depresión de 0° 30′ 18'' . ¿A qué altura se encuentra la nave?. Radio de la tierra: 6370 Km. **R:** 248 m.

4. Calcular el área de un dodecágono regular de 6 cm de lado y el área de un pentágono regular de 8 cm de lado. **R:** 403,06 cm^2.

5. Con un compás cuyos brazos miden 12 cm se traza una circunferencia de 5 cm de diámetro. ¿Cuál es el ángulo que forman sus brazos?. **R:** 11° 53′ 37''

6. Desde un avión de reconocimiento que vuela a una altura h del suelo se observan dos puntos en el suelo distantes entre sí 400 m. Si los ve a ambos con un ángulos de depresión de 36° y 25° respectivamente, calcular la altura h. **R:** 526,75 m.

7. Desde un avión a 1500 m de altura se observa una embarcación, con un ángulo de depresión de 34°, y sobre el mismo plano, en sentido opuesto, se observa el puerto mediante un ángulo de depresión de 45°. ¿A qué distancia se encuentra el barco del puerto?. **R:** 3.723 m.

8. Desde un punto situado a 100 m del pie de la perpendicular se observa una cometa A con un ángulo de elevación 86° 40′ y otra cometa B situada justamente debajo de ésta con un ángulo de 47° 20′ . ¿Cuál es la distancia entre las dos cometas?. **R:** 1608,4 m

9. Una bandera cuya asta mide 6m está situada sobre una columna. Desde cierto punto, el extremo superior de la bandera se ve con un ángulo de elevación de 20° y el extremo inferior se ve con un ángulo de 12° 30′, calcula la altura de la columna y la distancia al punto de observación. **R:** 9,348 m y 42,17 m

10. El ángulo de elevación del extremo de una torre medido desde un punto del suelo horizontal es de 53°. Caminando 35 m hacia la base de la torre, el ángulo de elevación crece a 64° . Calcular la altura de la torre. 146,56 m

11. Desde cierto punto del suelo se observa el punto más alto de una torre formando un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 75 m hacia la base de la torre, ese ángulo mide 60° . Hallar la altura de la torre. **R:** 64,95 m

12. Desde un punto B del suelo se observa el punto más alto de una torre bajo un ángulo de 45°. Alejándose 150 m hasta C se ve el mismo punto, bajo un ángulo de 20° . ¿Cuál es la altura de la torre y la distancia que hay desde el punto C hasta el pie de la torre?. **R:** 85,84 m y 235,84 m.

13. Dos puntos A y B están sobre una misma línea hrizontal separados por una distancia de 16,09 Km . Desde el punto A se observa un punto S, ubicado en la parte superior de la recta que une los puntos, con un ángulo de 37° y desde el punto B se observa el mismo punto S con un ángulo de 20°. Calcular: a) La distancia desde A hasta S b) La distancia perpendicualr medida desde el punto S hasta la linea horizontal que une los puntos A y B.

R: a) 6,56 Km. b) 3,95 Km.

14. Dos ciudades, A y B, están ubicadas en una carretera que va desde el norte hacia el sur. Otra población, C, a 10 Km en línea recta de la carretera anterior, está situada a 20° al suroeste de A y a 30° al suroeste de B. ¿Qué distancia separa A de B?. **R:** 44,80 Km.

15. Desde un punto A se ve la cima de una montaña con un ángulo de elevación de 24°, y desde un punto B situado en linea recta con el anterior y distantes entre sí 1,2 Km se ve la cima de la montaña con un ángulo de elevación de 30°. ¿Cuál es la altura de la montaña?.

R: 2,33 Km.

16. Desde un acantilado, situado a 32 m sobre el nivel del mar, se divisan dos embarcaciones. ¿Qué distancia existe entre dichas embarcaciones si los ángulos de depresión respectivos son: 36° 16′ y 25° 10′ ?. **R:** 111,211 m.

17. Hallar la longitud de la base de un triángulo isósceles cuya altura mide 34,14 cm y el ángulo opuesto a la base es de 30°. **R:** 18,30 cm.

18. Desde la parte superior de un edificio de 60 m de altura, el ángulo de elevación de un poste es 14°. En la base del edificio el ángulo de elevación de la punta del poste es 28°. Calcular: a) la altura del poste b) la distancia del poste al edificio. **R:** a) 112,977 m b) 212,479 m.

19. Las dos ramas de un compás forman un angulo de 60° y cada rama tiene 12 cm de longitud, hallar el radio de la circunferencia que puede trazarse. **R:** 12 cm.

20. Las puntas de las ramas de un compás distan 7 cm. Si cada rama mide 12 cm, calcular el ángulo que forman las ramas del compás. **R:** 33° 54′ 56″

21. Una persona está parada en una ventana situada a 80 m sobre el nivel del suelo observa a un niño que camina directamente hacia ella, mientras que el ángulo de depresión hacia el niño varía de 42° 12′ a 54° 26′ . ¿Qué distancia ha caminado el niño?. **R:** 31,016 m.

22. Una antena de televisión está colocada en la orilla de la azotea de una casa que tiene de altura 10 m. Desde un punto a 40 m de la base de la casa se ve la punta de la antena con un ángulo de elevación de 26° 15′ . Calcular la altura de la antena. **R:** 9,72 m.

23. El copiloto de una avioneta que vuela a una altura de 2.440 m sobre el nivel del mar divisa una isla, observando un extremo de ella con un ángulo de depresión de 27° y el otro extremo con un ángulo de depresión de 39° . ¿Qué ancho tiene la isla?. **R:** 1.775 m.

Actividades complementarias

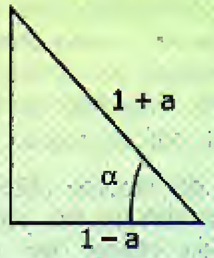
1. En un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 cm y 4 cm, calcular las razones trigonométricas de los ángulos agudos.

R: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tag}\alpha = 2$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tag}\beta = 1/2$

2. Si en un triángulo rectángulo se verifica que $\cot\alpha = 3$,¿cuál es el valor de $\sec^2\alpha$?. **R**: 10/9

3. Observa el triángulo de la figura de la derecha.
   Calcula las razones trigonométricas, seno, coseno, y tangente del ángulo α

   R: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{a}}{1+a}$, $\cos\alpha = \frac{1-a}{1+a}$, $\operatorname{tag}\alpha = \frac{2\sqrt{a}}{1-a}$



4. Si $\cos x = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$, con x en el primer cuadrante, demostrar que $\operatorname{sen} x = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$

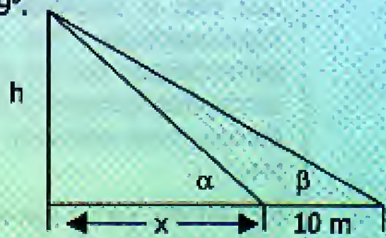
5. En un triángulo rectángulo se tiene que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Si α es del primer cuadrante, hallar el valor de tag α **R**: $2\sqrt{2}$

6. Demuestra en forma razonada las siguientes igualdades:

   a) $\frac{\cos^4 a - \operatorname{sen}^4 a}{\operatorname{sen} a \cdot \cos a} = \frac{1 - \operatorname{tag}^2 a}{\operatorname{tag} a}$ b) $(1 + \operatorname{tag} A)\cdot(1 + \cot A) = \frac{(\operatorname{sen} A + \cos A)^2}{\operatorname{sen} A \cdot \cos A}$

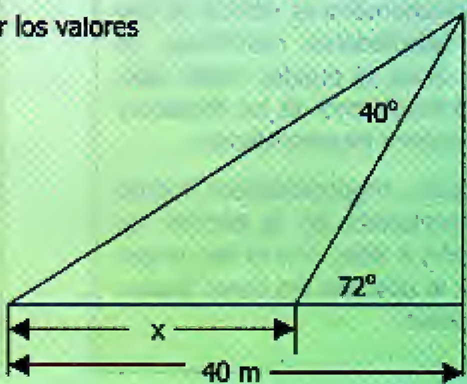
   c) $\cot^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - \cot^2\alpha = -\cos^2\alpha$ d) $\frac{1 - \operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x} = 2 - \cos^2 x$

7. Observa el triángulo de la derecha, donde α = 26,6° y β = 29°.
   Calcula las longitudes de h y x
   R: h = 51,84 cm x = 93,52 cm



8. Dado el triàngulo de la figura, calcular los valores
   ¿Cuáles valores son los correctos?:

   a) h = 99 m; x = 7,83 m
   b) h = 24,99 m; x = 31,88 m
   c) h = 24,99 m; x = 48,12 m



HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

La trigonometría que estudia las relaciones métricas entre los lados y los ángulos de un triángulo, había servido desde la antiguedad como un axiliar práctico de los agrimensores, astrónomos y navegantes.

El nombre de trigonometría apareció por primera vez como título de un libro de Pitiscus, el cual fue publicado en 1595. Descubrió las fórmulas para sen 2α, sen 3α, cos 2α, cos 3α.

Abraham de Moivre (1667-1754), matemático francés, fue uno de los primeros en utilizar los números complejos en la trigonometría, siendo muy amigo de Sir Isaac Newton y del astrónomo Edmond Halley.

Fueron los griegos quienes establecieron las relaciones entre las medidas angulares con las de longitud, midiendo la cuerda del arco. Más tarde los astrónomos de la India elaboraron tablas más precisas para relacionar la mitad del ángulo central con la mitad de su cuerda, la cual es la función que hoy llamamos seno. Gracias a ello se fue capaz de perfeccionar la Astronomía Este hecho, que vino a simplificar las fórmulas trigonométricas, fue adaptado y perfeccionado por los árabes que lo condujeron durante la Edad Media a Europa, conjuntamente con el álgebra.

Hoy en día, ya no son necesarias las tablas trigonométricas debido al uso de las calculadoras científicas, ya que con éstas se pueden hallar rápidamente los valores de los ángulos y de sus razones trigonométricas.

Los cálculos trigonométricos fueron muy importantes en la técnica de navegación a vela, con el fin de determinar la posición del barco durante la travesía.

¿Por qué debemos aprender a resolver triángulos?

Esta pregunta puede ser respondida argumentando que cualquier figura plana puede ser aproximada mediante triángulos.

Una de las inmediatas aplicaciones la encontramos en una ciencia llamada Geodesia, la cual trata de la medida del globo terrestre o de una parte de él, para lo cual son usados redes de triángulos cuyos lados miden unos pocos kilómetros.

Existen métodos desde muy antiguo que permiten medir toda la red partiendo de una única distancia. Este se fundamenta en medir directamente un lado del triángulo, denominado base, y después los ángulos adyacentes.

El método de triangulación es utilizado también para la resolución aproximada de problemas de **mecánica de materiales.** Supóngase que se desea hacer un análisis del movimiento del agua de un depósito. Para ello se divide el espacio ocupado por el fluido en una red de triángulos para aplicar después las leyes de la mecánica y así obtener la velocidad de cada partícula del fluido.

Eratóstenes fue el primero en usar métodos similares con el objeto de calcular el meridiano terrestre, valiéndose de la diferencia del ángulo de incidencia entre los rayos solares en las ciudades de Siena y Alejandría a mediodía.

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

5.1 ¿Qué es una circunferencia trigonométrica?.

Cuando sobre un sistema de coordenadas, y con centro en el origen, se construye un círculo de radio igual a 1, resulta una figura que se llama **círculo trigonométrico** o **circunferencia trigonométrica.** Figura 5.1

En dicha figura pueden observarse cuatro regiones iguales llamadas cuadrantes, los cuales se denotan con I, II, III y IV.

De acuerdo al cuadrante en el que esté ubicado el lado terminal del ángulo lo clasificaremos como ángulos del primero, segundo, tercero o cuarto cuadrante. Figura 5.2

Definiciones previas

Un ángulo está en **posición normal o estándar** en un sistema de coordenadas sólo sí su vértice coincide con el origen y su lado inicial se encuentra sobre el eje positivo x. Todos los ángulos de la figura 5.2 están en posición normal.

Se dice que un ángulo en posición normal se encuentra en el cuadrante que contiene su lado final.

Se llama **ángulo cuadrantal**, el que tiene su lado terminal sobre el eje y o x. Todos los ángulos que son múltiplos de 90° son cuadrantales (90°-180°- 270°-360°). Ver figuras 5.3

Los ángulos diferentes con el mismo lado terminal o final reciben el nombre de **ángulos coterminales** ($x = 45^\circ + k.360^\circ$) 45° y 405° son ángulos coterminales

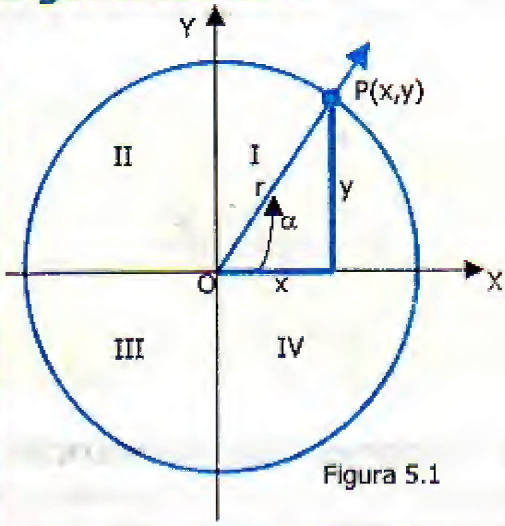


Figura 5.1

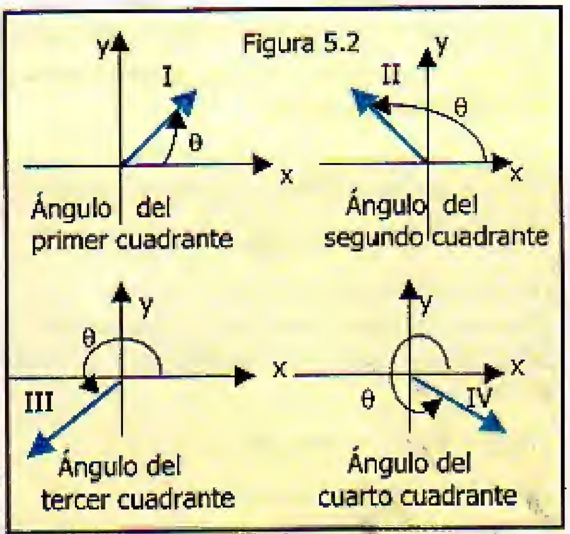


Figura 5.2

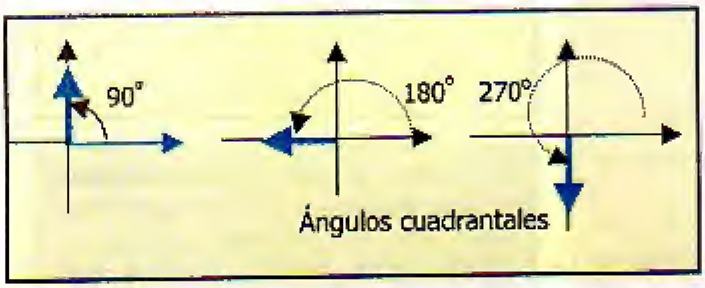


Figura 5.3(a)

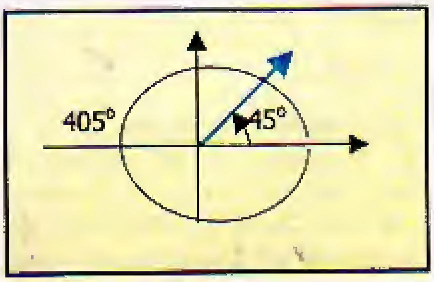


Figura 5.3(b)

5.2 Ángulos positivos y ángulos negativos

Un **ángulo tiene sentido positivo** si la trayectoria seguida para generarlo, partiendo desde el lado inicial hasta el lado terminal, es en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Figura 5.4 (a).

Un **ángulo tiene sentido negativo** si la trayectoria seguida para generarlo, partiendo desde el lado inicial hasta el lado terminal, es en la misma dirección de las manecillas del reloj. Figura 5.4 (b)

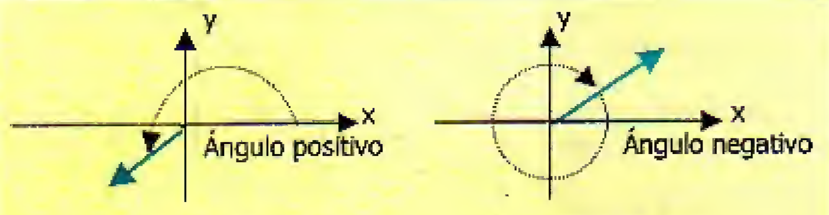


Figura 5.4 (a) Figura 5.4 (b)

5.3 Razones trigonométricas

Partamos de la circunferencia trigonométrica de radio unitario (figura 5.4) e imaginémonos que el punto P de coordenadas (x,y) parte de A y hace un recorrido a través de la circunferencia, moviéndose en el sentido contrario a las agujas del reloj (sentido positivo).

Al tomar como radio la unidad pueden definirse las razones trigonométricas del ángulo α o del arco AP de la siguiente forma:

Apliquemos las definiciones para el ángulo α

1. $\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{1} \longrightarrow \text{sen}\,\alpha = y$

De esta expresión definimos:
El seno del ángulo es igual a la ordenada del extremo del arco AB trazado con el radio unidad.

2. $\cos\alpha = \frac{x}{1} \longrightarrow \cos\alpha = x$

De la expresión definimos que:
El coseno del ángulo es igual a la abscisa del extremo del arco AB trazado con el radio unidad.

3. $\text{tag}\,\alpha = \frac{y}{x}$

De la expresión definimos:
La tangente de un ángulo es el cociente entre la ordenada y, y la abscisa x.
De igual forma la cotangente, la secante y la cosecante del ángulo α son, respectivamente, las inversas de la tangente, el coseno y del seno α.

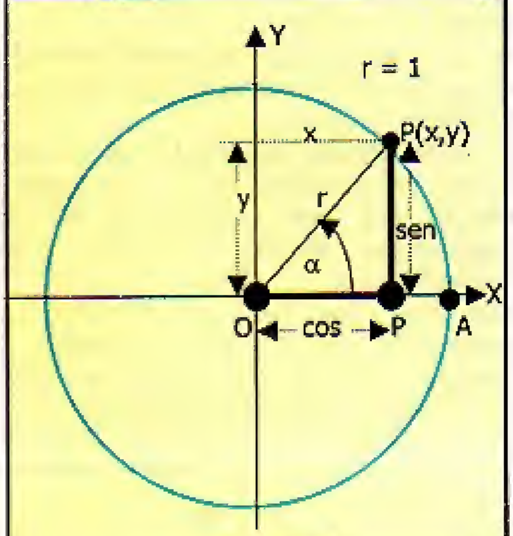


Figura 5.4

Se llaman **líneas trigonométricas** de un ángulo α a los segmentos representativos del seno y el coseno, cuyas medidas, cuando se usa el radio unidad, coinciden con las razones trigonométricas de dicho ángulo.

5.4 Diferencia entre razón trigonométrica y función trigonométrica.

Una razón trigonométrica (seno, coseno, tangente) es una relación o comparación por cociente entre dos magnitudes lineales; siendo por lo tanto un número abstracto. La razón trigonométrica, ya sea de un arco o un ángulo, expresa el valor numérico de la función correspondiente.

Una función trigonométrica, al igual que toda función, es una relación entre la variable independiente (arco o ángulo) y la variable dependiente (seno, coseno, tangente etc.).

Para cada ángulo α se obtiene un valor para seno, otro para coseno y otro para tangente. Para cada valor de α hay un valor único para seno, un único valor para coseno y un único valor para tangente.

Las funciones f(x) en las que cada valor de x corresponde un valor de (seno, coseno o tangente) se denominan funciones trigonométricas. Escribimos:

$$f(x) = \text{sen } x \qquad f(x) = \cos x \qquad f(x) = \text{tag } x$$

La variable independiente x es el ángulo y la variable dependiente es la razón trigonométrica correspondiente. El arco AB que define el seno, el coseno o la tangente de un ángulo, expresado en radianes, es el valor que toma x.

Las razones trigonométricas se estudian en el intervalo $[0, 2\pi]$

5.5 Signos de las razones trigonométricas.

El **signo de las razones trigonométricas** dependerá del cuadrante en que se encuentre situado el ángulo, ya que entonces se conoce el signo de la abscisa y la ordenada.

El signo de la tangente se obtiene por el cociente entre el signo del seno y el signo del coseno.

Veamos:

	I	II	III	IV
seno	+	+	–	–
Coseno	+	–	–	+
tangente	+	–	+	–

En este cuadro aparecen resumidos los signos correspondientes de cada una de las razones trigonométricas en cada uno de los diferentes cuadrantes.

Figura 5.5
Signos de las funciones en cada uno de los cuadrantes cuando todos son positivos

Es importante hacer notar que las funciones cosec, sec y cot son recíprocas de las sen, cos, y tag, por lo que los signos de las tres primeras son, respectivamente, iguales a los de las tres últimas.

5.6 Reducción de ángulos al primer cuadrante

La conversión de una función trigonométrica de un ángulo cualquiera en otra función equivalente de un ángulo del primer cuadrante recibe el nombre de **reducción al primer cuadrante**.

Para realizar este proceso será necesario transformar el ángulo mayor de 90° en un ángulo agudo (menor de 90°) que sea equivalente y finalmente colocarle **el signo** que posee la función en el cuadrante correspondiente.

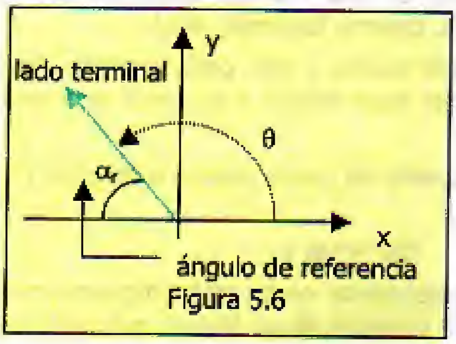


Figura 5.6

Es posible calcular los valores funcionales de un ángulo cuyo lado terminal forme un ángulo de 30°, 45° ó 60° con el eje x. Ese ángulo agudo positivo, formado entre el lado terminal del ángulo en posición estándar y el eje x, recibe el nombre de **ángulo de referencia**. Figura 5.6

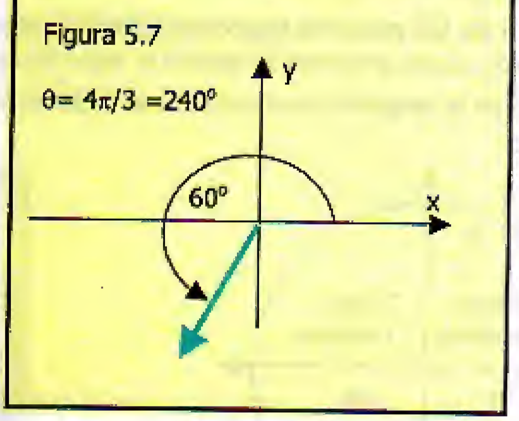
Es de notarse que un ángulo de referencia se define sólo para un ángulo cuyo lado terminal no esté ubicado sobre el eje x o sobre el eje y.

Ejemplo

Consideremos un ángulo dé 240^0 y tratemos de colocar dicho ángulo en posición normal, tal como lo muestra la figura 5.7

El ángulo de 240° tiene su lado terminal en el tercer cuadrante y el ángulo agudo que está constituido entre el lado terminal y el eje negativo de x es de 240° - 180° = 60°. Este ángulo, de valor 60°, es el llamado **ángulo de referencia**.
Si el ángulo θ está dado en radianes debe ser convertido a un ángulo en grados con el fin de trabajar con mayor comodidad.

Figura 5.7

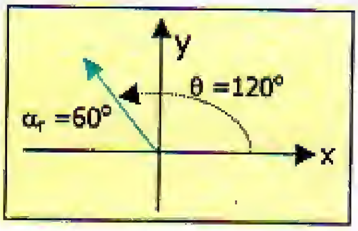


En general, para hallar los valores funcionales de un ángulo hallamos los del ángulo de referencia α_r y colocamos delante de éstos el signo apropiado

Para su estudio analizaremos cuatro casos referidos a un ángulo de referencia α_r

1.- Si el ángulo está en el segundo cuadrante

Si θ está en el segundo cuadrante se tendrá que $\boxed{\alpha_r = 180° - \theta}$



Ejemplo Determinar: **a)** sen 120° **b)** cos 120° **c)** tag 120°

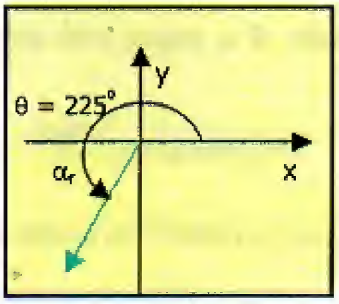
Solución
Obsérvese que el ángulo de 120° está ubicado en el segundo cuadrante, por lo que el ángulo de referencia α_r viene dado por $\alpha_r = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

a) $\text{sen } 120^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (positivo, porque el seno en el II cuadrante es positivo)

b) $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ (negativo, porque el coseno en el II cuadrante es negativo)

c) $\text{tag } 120^\circ = -\text{tag } 60^\circ = -\sqrt{3}$ (es negativo, pues, la tangente en el II cuadrante es negativa)

2.- Si el ángulo está en el tercer cuadrante



Si θ está en el tercer cuadrante se tendrá que $\boxed{\alpha_r = \theta - 180^\circ}$

Ejemplo Determinar: **a)** sen 225° **b)** cos 225° **c)** tag 225°

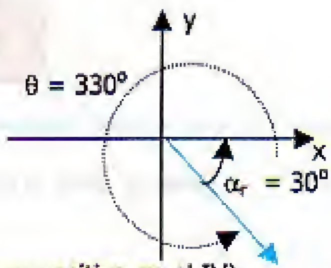
Solución
El ángulo de 225° está ubicado en el tercer cuadrante, por lo que el ángulo de referencia será: $\alpha_r = 225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$

a) $\text{sen } 225^\circ = -\text{sen } 45^\circ = -\sqrt{2}/2$ (porque el seno en el III cuadrante es negativo)

b) $\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\sqrt{2}/2$ (porque el coseno en el III cuadrante es negativo)

c) $\text{tag } 225^\circ = \text{tag } 45^\circ = 1$ (porque la tag en el III cuadrante es positiva).

3.- Si el ángulo está en el cuarto cuadrante



Si θ está en el cuarto cuadrante se tendrá que: $\boxed{\alpha_r = 360^\circ - \theta}$

Ejemplo Determinar: **a)** sec 330° **b)** sen 330° **c)** tag 330°
Solución
El ángulo de 330° está ubicado en el cuarto cuadrante, por lo que el ángulo de referencia será: $\alpha_r = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$

a) $\sec 330^\circ = \sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (sec es inverso del coseno y éste es positivo en el IV)

b) $\text{sen } 330^\circ = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2}$ (porque el seno en el IV cuadrante es negativo)

c) $\text{tag } 330 = -\text{tag } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (la tangente en el IV cuadrante es negativa)

4.- Cuando el ángulo es positivo y mayor de 360°

Si el ángulo es mayor de 360° se procede a dividir su valor entre 360° y se toma el residuo.
Al dividirse, no deben ser eliminados los ceros del dividendo y el divisor, ya que esto altera el resultado del residuo.

Ejemplo Determinar: **a)** cos 1920° **b)** tag 1920°

Solución
Efectuemos la división de 1920 entre 360
El residuo de la división es 120, como puede verse
El ángulo de referencia será $\alpha_r = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
Luego escribimos:

$$\begin{array}{r|l} 1920 & 360 \\ \hline 120 & 5 \end{array}$$

a) $\cos 1920^\circ = \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 120^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ (cos es negativo)

b) $\tan 1920^\circ = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 120^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ (tag es negativa)

Observación: Si el ángulo está dado en radianes, transformamos éstos a grados y repetimos el proceso.

Ejemplo Encontrar el $\cos \dfrac{124\pi}{12}$

Convertimos los radianes en grados así: $\dfrac{124\pi}{12} = \dfrac{124.180^\circ}{12} = 1860^\circ$

Luego al dividir 1860 entre 360 nos queda de residuo 60 →

$$\begin{array}{r|l} 1860 & 360 \\ \hline 60 & 5 \end{array}$$

$\cos \dfrac{124\pi}{12} = \cos 1860^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

Luego

$$\boxed{\cos \frac{124\pi}{12} = \frac{1}{2}}$$

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1 Hallar el seno, el coseno y la tangente de 330°

Solución
Debemos, en primer lugar, reducir el ángulo de 330° al primer cuadrante. Como este ángulo está en el cuarto cuadrante usamos $\alpha_r = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$
Como el seno en el cuarto cuadrante es negativo escribimos para cada uno:

$\text{sen } 330^\circ = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2}$ (el sen en el IV cuadrante es negativo)

$\cos 330^\circ = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (el cos en el IV cuadrante es positivo)

$\tan 330^\circ = -\tan 30^\circ = -\sqrt{3}/3$ (la tangente en el IV cuadrante es negativa)

Ejemplo 2 Hallar el sen de 600°

Solución

Como 600° es mayor que 360° se divide 600 entre 360, obteniéndose como residuo 240.

Este 240° que está en el tercer cuadrante lo reducimos al primer cuadrante para obtener el ángulo de referencia α_r

$$\alpha_r = 240° - 180° = 60°$$

Luego

sen 600° = sen 240° = - sen 60° = $-\sqrt{3}/2$ (el sen en el III cuadrante es negativo).

Ejemplo 3 Dado un ángulo θ = 210° determinar las razones trigonométricas

Solución

θ = 240° está ubicado en el tercer cuadrante, por lo que el ángulo de referencia viene dado de la siguiente forma: α_r = 210° - 180° = 30°.

sen 210° = - sen 30° = $-\frac{1}{2}$	cos 210° = - cos 30° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	tag 210° = tag 30° = 0,57
csc 210° = - csc 30° = - 2	sec 210° = - sec 30° = $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	cot 210° = cot 30° = 1.73

Ejemplo 4 Hallar el cos $\frac{23\Pi}{6}$

Solución

Transformemos el ángulo dado a grados

$$\frac{23\Pi}{6} = \frac{23.180}{6} = 690°$$

Este ángulo es necesario dividirlo entre 360° ya que se trata de un ángulo mayor de 360°

El residuo de la división es 330. Esto nos indica que el ángulo está en el cuarto cuadrante

Estos 330° lo reducimos al primer cuadrante α_r = 360° - 330° = 30°

Luego $\cos\frac{23\Pi}{6} = \cos 690° = \cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \boxed{\cos\frac{23\Pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Ejemplo 5 Sabiendo que sen $\Phi = -\frac{1}{2}$ y Φ en el IV cuadrante calcular sec Φ y tag Φ

Para calcular sec Φ debemos encontrar primero cos Φ por la relación $\cos^2\Phi = 1 - \text{sen}^2\Phi$

Esta expresión puede escribirse como $\cos\Phi = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2\Phi}$ donde al sustituir nos queda que:

$$\cos\Phi = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{4-1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como el ángulo Φ está en el cuarto cuadrante y el coseno es positivo en éste, se tendrá que:

$$\boxed{\cos\Phi = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Como la sec es el inverso del coseno también ha de ser positiva, por lo que se tendrá que:

$$\sec\Phi = \frac{2}{\sqrt{3}} \longrightarrow \boxed{\sec\Phi = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

La tangente será $\tan\Phi = \dfrac{\text{sen}\,\Phi}{\cos\Phi} \longrightarrow \tan\Phi = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow \boxed{\tan\Phi = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. En cada uno de los ejercicios dibuja el ángulo dado en posición normal y obtiene el ángulo de referencia.

a) $\frac{2\Pi}{3}$ b) 210° c) 315° d) 60° e) $\frac{5\Pi}{6}$ f) 495°

g) 2640° h) 2010° i) $\frac{3\Pi}{2}$ j) 135° k) $\frac{5\Pi}{3}$ ℓ) 780°

2. En cada uno de los ejercicios determinar el valor indicado:

a) $\text{sen}\frac{5\Pi}{6}$ b) $\text{tag}\frac{4\Pi}{3}$ c) sen 225° d) sec 225° e) cos 225° f) $\text{sen}\frac{11\Pi}{6}$ g) cos 2370°

h) $\cos\frac{3\Pi}{4}$ i) cot 225° j) $\text{cosec}\,\frac{3\Pi}{4}$ k) tag 3210 ℓ) $\sec^2 330°$

3. Dado un ángulo θ = 1320° determinar todas las razones trigonométricas.

4. Sabiendo que sec θ = 2 y θ en el IV cuadrante calcular tag θ. cos θ y sen θ.

5. Si $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ y θ está en el cuadrante IV, determinar cosec θ.

6. Si $\cot\theta = -\frac{1}{3}$ y θ está en el cuadrante IV, determinar sen θ y sec θ.

7. Encontrar el valor de x en la expresión siguiente: $x = \dfrac{\text{sen}\,330° + \cos 1920° + \text{tag}\frac{3\Pi}{4}}{6\text{sen}150° + \cot 135°}$

8. Encontrar el valor de x en la expresión siguiente: $x = \dfrac{\text{sen}\frac{5\Pi}{2}.\sec\frac{25\Pi}{6} - \text{tag}\,2640°}{\cos^2 225° - \text{cosec}\,2040°}$

9. Evalúa, usando una calculadora, cada una de las expresiones dadas:

a) $\tan\frac{5\Pi}{6}$ **b)** sen 240° **c)** csc 125° **d)** cos 180°

e) sen 270° **f)** $\cot\frac{7\Pi}{6}$ **g)** sen $\frac{5\Pi}{4}$ **h)** csc $\frac{11\Pi}{6}$

i) tag 225° + cos 330° **j)** $\text{sen}^2\, 2020 + \cos^2 330$ **k)** $\dfrac{\text{sen}^2 120^\circ + 2\text{sen}^2 225^\circ}{\cos^2 120^\circ - \text{sen}^2 300^0}$

Respuestas

1. a) $\frac{\Pi}{3}$ **b)** 30° **c)** 45° **d)** 60° **e)** $\frac{\Pi}{6}$ **f)** 45°
g) 60° **h)** 30° **i)** 90° **j)** 45° **k)** 60° ℓ) 60°

2. a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\sqrt{3}$ **c)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **d)** $-\sqrt{2}$ **e)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **f)** $-\frac{1}{2}$ **g)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **h)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
i) 1 **j)** $\sqrt{2}$ **k)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ℓ) 4/3

3. $\begin{cases} \text{sen}\,1320^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 1320^\circ = -\frac{1}{2} \quad \text{tag}\,1320^\circ = \sqrt{3} \quad \cot 1320^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{cosec}\,1320^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \sec 1320^\circ = -2 \end{cases}$

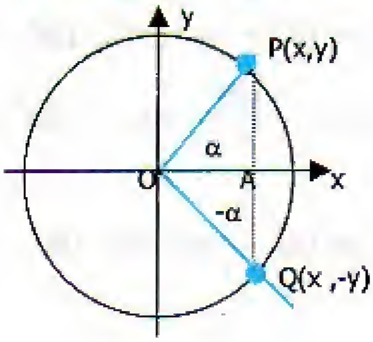
4. $\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\text{tag}\,\theta = -\sqrt{3}$ $\quad$ **5.** Cosec $\theta = -\frac{5}{3}$

6. $\text{sen}\,\theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$ $\quad$ $\sec\theta = \sqrt{10}$ $\quad$ **7.** $x = -1$ $\quad$ 8. $x = -\frac{10(\sqrt{3}-4)}{13}$

9. a) –0,57 **b)** –0,86 **c)** 1,22 **d)** –1 **e)** –1 **f)** 1.73 **g)** –0,707 **h)** –2
i) 1.86 **j)** 1, 163 **k)** – 3,5

5.7 *Funciones trigonométricas de ángulos opuestos*

Sea α un ángulo y su opuesto será $-\alpha$. Si sobre el semieje positivo de las x de un círculo unidad, llevamos los lados origen de los ángulos α y $-\alpha$ se forma la figura mostrada a la derecha.



Si se observa detenidamente la figura de la derecha se tendrá para el seno que:

Sen $(-\alpha) = -y$ .... (I)

sen $\alpha = y$ ....(II)

Si multiplicamos la expresión (II) por –1 nos queda que:

– sen = -y ....(III)

Si comparamos las expresiones (I) y (III) nos queda que $\boxed{\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha}$

Para el coseno se tendrá que

$$\left.\begin{array}{ll} \cos\alpha = x & \text{........(IV)} \\ \cos(-\alpha) = x & \text{........(V)} \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$$

La tag (- α) la obtenemos haciendo el cociente sen (- α) y cos (- α), obteniéndose la relación siguiente:

$$\boxed{\text{tag}(-\alpha) = -\text{tag}\,\alpha}$$

Como cosec, sec y cot son los inversos del sen, cos y tag se obtendrán las expresiones siguientes:

$\boxed{\text{cosec}(-\alpha) = -\csc\alpha}$ $\boxed{\sec(-\alpha) = \sec\alpha}$ $\boxed{\cot(-\alpha) = -\cot\alpha}$

CUADRO RESUMEN

sen (- α) = - sen α	cosec (- α) = - csc α
cos (- α) = cos α	sec (- α) = sec α
tag (- α) = - tag α	cot (- α) = - cot α

Estas expresiones del cuadro nos permiten el **proceso de conversión** de ciertas expresiones con ángulos negativos en expresiones con ángulos positivos, tal y como lo veremos en los ejemplos siguientes:

Expresar cada uno de los ángulos dados como función de un ángulo agudo positivo y obtener su valor:

a) sen (-120°) **b)** cos $\left(-\frac{5\Pi}{4}\right)$ **c)** cot (-150°)

d) tag $\left(-\frac{5\Pi}{3}\right)$ **e)** sec $\left(-\frac{3\Pi}{4}\right)$ **f)** csc (-300°)

Soluciones

a) $\text{sen}(-120^\circ) = -\text{sen}\,120^\circ = -\text{sen}(180^\circ - 120^\circ) = -\text{sen}\,60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\left(-\frac{5\Pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{5.180^\circ}{4}\right) = \cos(-225^\circ) = \cos 225^\circ = \cos(225^\circ - 180^\circ)$

$= -\cos 45 = -\sqrt{2}/2$

c) $\cot(-150^\circ) = -\cot 150^\circ = -\cot(180^\circ - 150^\circ) = -(-\cot 30^\circ) = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$

d) $tag(-\frac{5\Pi}{3}) = tag(-\frac{5.180^\circ}{3}) = tag(-300) = -tag\,300 = -tag(360^\circ - 300^\circ)$

$= -(-tag\,60^\circ) = \sqrt{3}$

e) $sec(-\frac{3\Pi}{4}) = sec(-\frac{3.180^\circ}{4}) = sec(-135^\circ) = sec\,135^\circ = sec(180^\circ - 135^\circ)$

$= -sec\,45^\circ = -\sqrt{2}$

f) $csc(-300^\circ) = -csc\,300^\circ = -csc(360^\circ - 300) = -(-csc\,60^\circ) = csc\,60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Tabla que contiene valores de los ángulos cuadrantales

	0°	$90^0 - \pi/2$	$180^\circ - \pi$	$270^\circ - 3\pi/2$	$360^\circ - 2\pi$
sen	0	1	0	-1	0
cos	1	0	- 1	0	1

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. En cada uno de los ejercicios siguientes indique si el signo de la función es correcto o no

a) sen 150° = (+) **b)** cos 170° = (+) **c)** tag 210° = (+) **d)** cot 301° = (-)

e) cos 301° = (+) **f)** sec 200° = (+) **g)** csc 250° = (+) **h)** sen (-50°) = (+)

i) cos (- 70°) = (+) **j)** tag (- 100°) = (-) **k)** cot (-200°) = (-)

2. En cada uno de los ejercicios determinar el valor indicado:

a) cot(-300°) **b)** cot (-315°) **c)** tag ($-\pi/6$) **d)** sen ($-\pi/4$) **e)** cos ($-3\pi/4$)

f) sec($-11\pi/6$) **g)** tag ($-5\pi/6$) **h)** csc (- 1530°) **i)** sen (-1710°) **j)** sen ($-3\pi/2$)

3. Encontrar el valor de x sin usar calculadora en cada una de las expresiones siguientes

a) $x = \dfrac{\cos(-1860^\circ) + \csc(-2610^\circ)}{sen(-\frac{3\Pi}{2}) - sen(-315^\circ)}$ **b)** $x = \dfrac{2\,sen 1500^\circ + 3\,sen(-\frac{25\Pi}{3})}{2\cot(-315^\circ) - tag\,225^\circ} + \dfrac{sec\,\frac{3\Pi}{4}}{\cot(-\frac{\Pi}{6})}$

c) $x = \left(\dfrac{2}{sen(-\Pi/4) + \cos(-3\Pi/4)}\right)\left(tag(-300^\circ) + \dfrac{1 - sen\,5\Pi/4}{1 + \cot 90^\circ}\right)$

4. Haciendo uso de una calculadora evalúa cada una de las siguientes expresiones:

a) tag (-2640°) **b)** cos ($-2\pi/3$) **c)** csc ($-5\pi/4$) **d)** sec ($-11\pi/3$) **e)** sen ($-7\pi/6$)

f) cot (-225) **g)** cot ($-11\pi/6$) **h)** tag (-1200°) **i)** cos (- 2220°) **j)** sen ($-3\pi/4$)

5. Usa tu cuaderno. Copia y completa la siguiente tabla obteniendo los valores con el uso de la calculadora. Debes tener el cuidado de activar el modo de radianes o grados según sea el caso.

θ grados	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	240	270	315
θ radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
sen θ													
cos θ													
tag θ													

6. Si $\csc \Phi = -5/2$, siendo $3\pi/2 < \Phi \le 2\pi$ hallar $\cos \Phi$ y $\cot \Phi$

7. Si $\sec \Phi = -7/3$ y $\pi/2 < \Phi < \pi$ hallar $\csc \Phi$ y $\operatorname{tag} \Phi$

8. Haz uso de la calculadora y encuentra el valor de x en cada una de las expresiones. Usa tres decimales

a) $x = \dfrac{\operatorname{sen}(-120^\circ).\operatorname{sen}(-768^\circ) + \cos(-12\Pi/7)}{\operatorname{tag}(-966^\circ) + \cot(-150^\circ)}$ b) $x = \dfrac{-\cot(-1233^\circ) + \cos(-768^\circ).\sec(-225^\circ)}{\operatorname{sen}(-5\Pi/6).\cot(-150^\circ) + \cos(-1860^\circ)}$

Respuestas

1. a) sí b) no c) sí d) sí e) sí f) no g) no h) no i) sí j) no k) sí

2) a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) 1 c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ g) $\sqrt{3}$ h) -1 i) 1 j) 1

3) a) $-\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{-3\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{6}$ c) $-\sqrt{6}-2\sqrt{2}+2$

4) a) 1,7320 b) – 0,5 c) 1,4142 d) 2 e) 0,5

f) –1 g) 1,7320 h) 1,7320 i) 0,5 j) – 0,7071

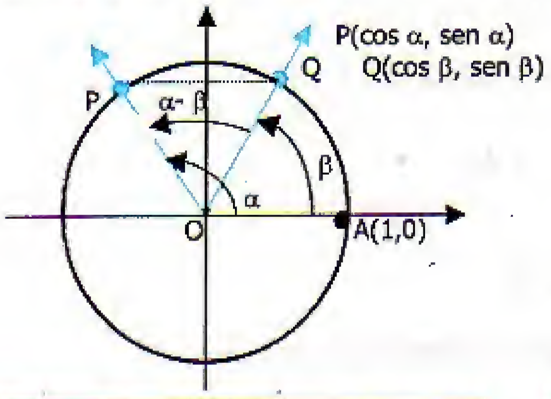
6) **7)** $\csc\Phi = \frac{7\sqrt{10}}{20}$ $\operatorname{tag}\Phi = -\frac{\sqrt{40}}{3}$

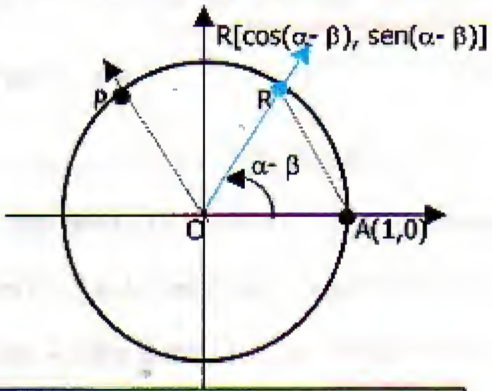
8) a) –2,4650 b) 7,9475

5.8 Identidades de suma y diferencia de dos ángulos

1. Coseno de la diferencia

Considere un círculo de radio unidad, llamado círculo unitario, cuyo centro está en el origen de un sistema de coordenadas, y dos ángulos α y β en posición normal (figura de la izquierda).





$\angle AOQ = \beta$ $\angle AOP = \alpha$ $\angle POQ = \alpha\text{-}\beta$
A: punto inicial del ángulo α
P: punto terminal del ángulo α
A: punto inicial del ángulo β
Q: punto terminal del ángulo β

En la figura se está mostrando el ángulo correspondiente a $\alpha - \beta$, el cual ha girado de modo que esté en posición normal.
El punto P se ha girado hasta R y el punto Q se ha girado hasta el punto A.

Sean P y Q los puntos de intersección del círculo con los lados terminales de α y β, respectivamente.

De acuerdo con las definiciones de seno y coseno de un número real las coordenadas de cada punto vendrán dadas así:

Para el punto P será **P(cos α, sen α)** y para el punto Q será **Q(cos β, senβ)**

Las coordenadas de los puntos R y A vienen dadas así: **R[cos(α-β), sen(α-β)]** y **A(1, 0)**.

Como el ángulo α-β es el mismo en ambas figuras, los arcos PQ y RA tienen la misma longitud y como consecuencia los segmentos de recta PQ y AR que representan cuerdas tienen la misma longitud, pudiéndose escribir que:

$$|PQ| = |AR| \quad \text{..........................}(\mathbf{1})$$

Si aplicamos la fórmula de la distancia entre dos puntos P y Q nos queda que:

$$|PQ|^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\text{sen}\,\beta - \text{sen}\,\alpha)^2 \quad (\text{ porque } d(P,Q)^2 = [\,Y_P - Y_Q\,]^2 + [\,X_P - X_Q\,]^2$$

Desarrollando los productos notables nos queda:

$$= \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \text{sen}^2\beta - 2\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\alpha + \text{sen}^2\alpha$$

Agrupando términos se tiene que:

$$= \underbrace{(\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta)}_{} + \underbrace{(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha)}_{} - 2(\cos\beta\cos\alpha + \text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\alpha)$$

$$= \quad 1 \quad + \quad 1 \quad - 2(\cos\beta\cos\alpha + \text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\alpha)$$

$$= \quad 2 - 2(\cos\beta\cos\alpha + \text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\alpha) \quad \text{....................}(\mathbf{2})$$

3. *Seno de la suma*

Evaluemos sen ($\alpha + \beta$)

sen ($\alpha + \beta$) = cos $\left[\frac{\Pi}{2} - (\alpha + \beta)\right]$ (porque sen x = cos $\left[\frac{\Pi}{2} - x\right]$ (por cofunciones)

$= \cos [(\frac{\Pi}{2} - \alpha) - \beta]$ (reagrupando los términos)

Si desarrollamos utilizando la fórmula del coseno de la diferencia tendremos que:

$$= \cos (\frac{\Pi}{2} - \alpha) \cos \beta + \operatorname{sen} (\frac{\Pi}{2} - \alpha) \operatorname{sen} \beta$$

Recordemos que → $\cos (\frac{\Pi}{2} - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$ y $\operatorname{sen} (\frac{\Pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$

Luego

$$\boxed{\operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}$$

Esta identidad es llamada **seno de la suma**

4. *Seno de la diferencia*

Evaluemos la expresión sen ($\alpha - \beta$)

sen ($\alpha - \beta$) = sen [α + (- β)]

= sen α cos (- β) + cos α sen (- β) (Aplicando identidad del seno de la suma)

= sen α cos β + cos α (- sen β) [Porque cos (- β) = cos β y sen (-β) = - sen β]

sen ($\alpha - \beta$) = sen α cos β - cos α sen β

Luego

$$\boxed{\operatorname{sen} (\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}$$

Esta identidad es llamada **seno de la diferencia**

5. Tangente de la suma y de la diferencia

Tratemos de expresar la tangente de una suma escribiéndola como el cociente entre el seno y el coseno de una suma.

$$\text{tag}(A+B) = \frac{\text{sen}(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\text{sen}\,A\cos B + \cos A\,\text{sen}\,B}{\cos A\cos B - \text{sen}A\,\text{sen}B}$$

Si dividimos cada término entre cos A cos B nos queda que:

$$\text{tag}(A+B) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,A\cos B}{\cos A\cos B} + \dfrac{\cos A\,\text{sen}\,B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B} - \dfrac{\text{sen}A\,\text{sen}B}{\cos A\cos B}} = \frac{\dfrac{\text{sen}\,A}{\cos A} + \dfrac{\text{sen}\,B}{\cos B}}{1 - \dfrac{\text{sen}A\,\text{sen}B}{\cos A\,\cos B}} \quad \text{(hemos simplificado)}$$

Como conocemos la relación $\text{tag}A = \dfrac{\text{sen}\,A}{\cos A}$ podemos escribir que

$$\boxed{\textbf{tag}(A+B) = \frac{\text{tag}A + \text{tag}B}{1 - \text{tag}A\,\text{tag}B}}$$

Para la identidad tangente de la diferencia hacemos el mismo proceso y encontramos que:

$$\boxed{\textbf{tag}(A-B) = \frac{\text{tag}A - \text{tag}B}{1 + \text{tag}A\,\text{tag}B}}$$

RESUMEN DE IDENTIDADES DE SUMA Y DIFERENCIA

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\text{tag}(A \pm B) = \frac{\text{tag}A \pm \text{tag}B}{1 \mp \text{tag}A\,\text{tag}B}$$

Aplicaciones de las identidades de suma y diferencia

Ejemplo 1 Hallar cos 135°

El ángulo de 135° puede escribirse así: 135° = 90° + 45° pudiendo utilizarse la identidad de la suma como sigue:

$$\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = \cos 90^\circ \,.\, \cos 45^\circ - \text{sen}\,90^\circ \,.\, \text{sen}\,45^\circ$$

$$= 0 \,.\, \cos 45^\circ - 1 \,.\, \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 2 Hallar $\text{sen}\frac{\Pi}{12}$

Como $\frac{\Pi}{12} = 15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$ podemos escribir que $\frac{\Pi}{12} = \frac{\Pi}{3} - \frac{\Pi}{4}$, pudiéndose utilizar la identidad de la diferencia como sigue:

$$\text{sen}\frac{\Pi}{12} = \text{sen}(\frac{\Pi}{3} - \frac{\Pi}{4}) = \text{sen}\frac{\Pi}{3}.\cos\frac{\Pi}{4} - \cos\frac{\Pi}{3}.\text{sen}\frac{\Pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{\text{sen}\frac{\Pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

Ejemplo 3 Hallar tag 105°

El ángulo de 105° puede escribirse así: 105° = 60° + 45°

$$\text{tag } 105^\circ = \text{tag } (60^\circ + 45^\circ) = \frac{\text{tag}\,60^\circ + \text{tag}\,45^\circ}{1 - \text{tag}\,60^\circ\,\text{tag}\,45^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}.1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+1)(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3})^2}{1-(\sqrt{3})^2} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{-2} = -(2+\sqrt{3})$$

$$\boxed{\text{tag } 105^\circ = -(2+\sqrt{3})}$$

Ejemplo 4 Sabiendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{24}{25}$ y $\text{sen}\,\beta = \frac{4}{5}$ con $0 < \alpha < \pi/2$ y $\pi/2 < \beta < \pi$, determinar a) sen (α + β) b) cos (α - β)

Solución

a) Utilizamos la fórmula $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \text{sen}\beta$ ....(I)

Conocemos los valores de sen α y sen β, por lo que debemos determinar cos β y cos α

Encontremos cos β

Para encontrar cos β debemos utilizar la identidad $\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$$\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 \longrightarrow \cos^2\beta = 1 - \text{sen}^2\beta \text{ (despejando } \cos^2\beta\text{)}$$

$$\cos^2\beta = 1 - (4/5)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\cos^2\beta = \frac{9}{25} \longrightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$$

Como β está en el segundo cuadrante y el coseno en el segundo cuadrante es negativo se tendrá que:

$$\boxed{\cos\beta = -\frac{3}{5}}$$

Encontremos cos α
Usemos nuevamente la identidad $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$

$$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha \longrightarrow \cos^2\alpha = 1 - (24/25)^2 = 1 - \frac{576}{625} = \frac{625-576}{625} = \frac{49}{625}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{49}{625} \longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{49}{625}} = \pm\frac{7}{25}$$

Como α está en el primer cuadrante y en éste el coseno es positivo se tendrá que:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{7}{25}}$$

Determinemos sen ($\alpha + \beta$)

Sustituimos sen α, cos α, sen β, cos β por sus valores en la identidad seno de la suma
$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\beta$

$$= \left(\frac{24}{25}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{7}{25}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{72}{125} + \frac{28}{125} = -\frac{44}{125}$$

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = -\frac{44}{125}$$

b) Determinemos cos ($\alpha - \beta$)
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\beta$
Sustituyendo cos α, cos β, sen α, senβ por sus valores nos queda que:

$$\cos(\alpha-\beta) = \left(\frac{7}{25}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{24}{25}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{21}{125} + \frac{96}{125} = \frac{75}{125}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{75}{125}$$

Ejemplo 5 Simplificar la expresión $\text{sen}\frac{\Pi}{3}\cos\Pi + \text{sen}\,\Pi\cos\frac{\Pi}{3}$. Encontrar su valor

Lo anterior es equivalente a escribir

$$\text{sen}\frac{\Pi}{3}\cos\Pi + \cos\frac{\Pi}{3}\text{sen}\,\Pi$$

De acuerdo con la identidad $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$ podemos escribir que:

$$\text{sen}\frac{\Pi}{3}\cos\Pi + \cos\frac{\Pi}{3}\text{sen}\,\Pi = \text{sen}\left(\frac{\Pi}{3} + \Pi\right) = \text{sen}\,\frac{4\Pi}{3} = \text{sen}\,240^\circ$$

$$= \text{sen}\,(240^\circ - 180^\circ)$$

$$= -\text{sen}\,60^\circ$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo 6 Demostrar la siguiente identidad $\cos(\frac{\Pi}{3}+\Phi)-\cos(\frac{\Pi}{3}-\Phi)=-\sqrt{3}\,\text{sen}\,\Phi$

Desarrollemos el primer miembro usando las identidades estudiadas

$$\cos(\frac{\Pi}{3}+\Phi)-\cos(\frac{\Pi}{3}-\Phi)=\cos\frac{\Pi}{3}\cos\Phi-\text{sen}\frac{\Pi}{3}\text{sen}\,\Phi-(\cos\frac{\Pi}{3}\cos\Phi+\text{sen}\frac{\Pi}{3}\text{sen}\,\Phi)$$

$$=\underbrace{\cos\frac{\Pi}{3}\cos\Phi}_{A}-\text{sen}\frac{\Pi}{3}\text{sen}\Phi-\underbrace{\cos\frac{\Pi}{3}\cos\Phi}_{B}-\text{sen}\frac{\Pi}{3}\text{sen}\Phi$$

Como las expresiones A y B son iguales y de signos opuestos ellas se anulan, quedándonos:

$$=-2\text{sen}\frac{\Pi}{3}\text{sen}\,\Phi=-2.\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\,\Phi=-\sqrt{3}\,\text{sen}\,\Phi$$

Luego

$$\cos(\frac{\Pi}{3}+\Phi)-\cos(\frac{\Pi}{3}-\Phi)=-\sqrt{3}\,\text{sen}\,\Phi$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Hallar cos 105° en términos de cos (150° - 45°)
2. Hallar: **a)** $\cos\left(\frac{\Pi}{2}+\frac{\Pi}{6}\right)$ **b)** $\text{sen}\left(\Pi-\frac{\Pi}{4}\right)$ **c)** $\cos\left(\frac{3\Pi}{4}-\frac{\Pi}{3}\right)$ **d)** tag (45° - 30°)
3. Verifica cada una de las siguientes identidades:

   a) $\text{sen}(\Pi/2-\Phi)=\cos\Phi$ **b)** $\text{sen}(\Pi/2+\Phi)=\cos\Phi$ **c)** $\text{sen}(\Pi+\Phi)=-\text{sen}\Phi$

   d) $\cos(\Pi/2-\Phi)=\text{sen}\Phi$ **e)** $\cos(\Pi/2+\Phi)=-\text{sen}\Phi$ **f)** $\cos(\Pi-\Phi)=-\cos\Phi$

   g) $\cos(\Pi+\Phi)=-\cos\Phi$ **h)** $\cos(3\Pi/2-\Phi)=-\text{sen}\Phi$ **i)** $\cos(3\Pi/2+\Phi)=\text{sen}\Phi$

   j) $\text{sen}(\Pi-\Phi)=\text{sen}\Phi$ **k)** $\text{sen}(3\Pi/2-\Phi)=-\cos\Phi$ **ℓ)** $\cos(3\Pi/2+\Phi)=-\cos\Phi$

4. Haz uso de las identidades demostradas en el ejercicio 3 y simplifica las expresiones

   a) $\text{sen}(\Pi+\Phi).\cos(\Pi-\Phi)-\cos(\Pi+\Phi)\cos(\Pi-\Phi)$

   b) $\text{sen}(\Pi/2+A)\cos A+\cos(\Pi/2+A)\,\text{sen}\,A-2\text{sen}(\Pi+A)\cos\Pi/2-A)$

   c) $\text{sen}(\Pi/2+B)\cos(\Pi-B)-\text{sen}(\Pi/2+B)\cos(\Pi+B)$

   d) $\text{sen}(\Pi/2-A).\cos(\Pi-A)-\text{sen}(3\Pi/2-A)\text{sen}(\Pi/2+A)$

e) $\dfrac{\operatorname{sen}(\Pi/2+B)\operatorname{sen}(\Pi-B)+\cos(\Pi/2+B)\cos(\Pi+B)}{\operatorname{sen}(\Pi/2+B)\cos(\Pi-B)-\cos(\Pi+B)\cos(\Pi-B)}$

f) $\dfrac{\cos(\Pi+x)\cos(\Pi/2-x)-2\operatorname{sen}(\Pi/2+x)\operatorname{sen}(\Pi+x)}{\cos(\Pi/2+x)\cos(\Pi+x)+\operatorname{sen}(\Pi/2+x)\operatorname{sen}(\Pi-x)}$

5. Simplificar las siguientes expresiones:

a) sen(P + Q) + sen(P – Q)

b) cos(a + b)cos b + sen(a + b) sen b

c) cos A cos B – sen A sen B

d) cos Q sen P – cos P sen Q

e) cos A cos B + sen A sen B

f) cos 37° cos 22° - sen 22° sen 37°

g) sen 23° cos 37° + cos 23° sen 37°

h) cos 57° cos 12° + sen 57° sen 12°

i) $\cos\dfrac{4\Pi}{5}\cos\dfrac{3\Pi}{10}+\operatorname{sen}\dfrac{4\Pi}{5}\operatorname{sen}\dfrac{3\Pi}{10}$

j) $\dfrac{\operatorname{tag}50^\circ+\operatorname{tag}10^\circ}{1-\operatorname{tag}50^\circ\operatorname{tag}10^\circ}$

k) $\dfrac{\operatorname{tag}\frac{2\Pi}{5}-\operatorname{tag}\frac{3\Pi}{20}}{1+\operatorname{tag}\frac{2\Pi}{5}\operatorname{tag}\frac{3\Pi}{20}}$

ℓ) $\operatorname{sen}\dfrac{3\Pi}{7}\cos\dfrac{4\Pi}{7}+\cos\dfrac{3\Pi}{7}\operatorname{sen}\dfrac{4\Pi}{7}$

6. Demuestra las siguientes identidades:

a) sen(A + B) - sen(A - B) = 2 cosA senB

b) cos(x + 45°) + sen(x-45°) = 0

c) sen(x + y) cos y – cos(x + y)sen y = sen x

d) $\dfrac{\operatorname{sen}(A-B)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}=\cot B-\cot A$

e) $\operatorname{tag}(45^\circ+\Phi)=\dfrac{1+\operatorname{tag}\Phi)}{1-\operatorname{tag}\Phi}$

f) cos (x + y) + cos (x – y) = 2 cosy cos x

g) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\operatorname{sen}^2 B$

h) $\operatorname{sen}(A+B)\operatorname{sen}(A-B)=\operatorname{sen}^2 A-\operatorname{sen}^2 B$

i) $\cos(A+\dfrac{\Pi}{4})=\dfrac{\cos A-\operatorname{sen}A}{\sqrt{2}}$

j) $\operatorname{sen}(\Phi+\dfrac{\Pi}{4})=\dfrac{\operatorname{sen}\Phi+\cos\Phi}{\sqrt{2}}$

7. Dado sen α = 3/5 y sen β = 4/5 estando α y β entre 0 y $\pi/2$ evaluar

a) sen ($\alpha + \beta$)

b) cos ($\alpha + \beta$)

8. Sabiendo que sen $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos\beta = \dfrac{1}{2}$ estando α y β en el primer cuadrante, calcular:

a) cos ($\alpha + \beta$) b) csc ($\alpha + \beta$) c) cot ($\alpha + \beta$)

9. Supóngase que $\pi/2 < \alpha < \pi$ y $\pi < \beta < 3\pi/2$. Además sen α =3/4 y cos β = 2/5. Encontrar sen ($\alpha - \beta$)

10. Dado que sen A = - 3/5 para A en el tercer cuadrante y cos B = 5/12 para B en el cuarto cuadrante, determinar: a) sen (A + B) b) cos (A + B) c) ¿En qué cuadrante está A + B?

11. Si sec t = - 5/4 para t en el segundo cuadrante y cot u = $\frac{2}{\sqrt{5}}$ para u en el tercer cuadrante, determinar: **a)** sen (u – t) **b)** tag (u- t) .

12. Deducir una expresión para sen (A + B + C)

13. Usa la expresión deducida anteriormente para calcular sen (30° + 45° + 60°)

14. Comprobar que sen b . cos (a – b) + cos b . sen (a – b) = sen a

15. Comprobar las siguiente identidades

a) $\frac{sen(a+b)+sen(a-b)}{cos(a+b)+cos(a-b)} = tag\, a$ b) $\frac{sen(a-b)}{sen\, a\ \ sen\, b} = cot\, b - cot\, a$

16. Verifica las siguientes igualdades:

a) $cot(a+b) = \frac{cot\, a\, cot\, b - 1}{cot\, a + cot\, b}$ b) $cos(60^o + x) = \frac{cos\, x - \sqrt{3}\, sen\, x}{2}$

c) $sen(45^o + x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(cos\, x + sen\, x)$

17. Si tag A = 2, tag B = 3 y tag C = 2 + $\sqrt{3}$ verificar que tag (A + B + C) = $\sqrt{3}$

Respuestas

1. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ **2.** a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ d) $2-\sqrt{3}$

4. a) $-2cos^2\Phi$ b) 1 c) 0 d) 0 e) –tag B f) 1/2

5. a) 2 sen P cos Q b) –2 cos a cos^2 b c) cos (A + B) d) sen(P – Q) e) cos (A - B)

f) cos (22° + 37°) g) $\sqrt{3}/2$ h) $\sqrt{2}/2$ i) 0 j) $\sqrt{3}$ k) 1 ℓ) 0

7. a) 1 b) 0 **8.** a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ b) $-(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ c) $-(2-\sqrt{3})$ **9.** $\frac{-6-7\sqrt{3}}{20}$

10. a) $\frac{4\sqrt{119}-15}{60}$ b) $\frac{-20-3\sqrt{119}}{60}$ c) en II **11.** a) $\frac{4\sqrt{5}+6}{15}$ b) $\frac{50\sqrt{5}+108}{19}$

12. sen A cos B cos C + cos A sen B cos C + cos A cos B sen C – sen A sen B sen C

13. $\sqrt{2}/2$ **18.** sen (α + β) = 33/65 y cos(α - β) = - 16/65

5.9 Las fórmulas para el doble de un ángulo

1. Identidad del seno de valor doble

Para ello partiremos de la ya conocida relaciones sen (x + y)

Si en la identidad sen (x + y) = sen x cos y + cos x sen y hacemos x = y nos queda que:

sen (x + x) = sen x cos x + cos x sen x = 2sen x cos x

sen 2x = 2 sen x cos x

$$\boxed{\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x}$$

2. Identidades del coseno de valor doble

Si en la identidad cos (x + y) = cos x cos y - sen x sen y hacemos x = y nos queda que:

$\cos(x + x) = \cos x \cos x - \text{sen } x \text{ sen } x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x} \quad \text{.............(1)}$$

Utilicemos la identidad pitagórica $\text{sen}^2 + \cos^2 x = 1$ para escribir dos formas alternativas de la expresión anterior.

$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

$\cos 2x = 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$ (hemos sustituido $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ en (**1**))

$$\boxed{\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x} \quad \text{................(2)}$$

$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$ (sustituyendo $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ en (**1**))

$= \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$ (eliminando paréntesis)

$= 2\cos^2 x - 1$

$$\boxed{\cos 2x = 2\cos^2 x - 1} \quad \text{..................(3)}$$

Intentemos despejar $\text{sen}^2 x$ de la expresión de la expresión (**2**), quedándonos que:

$2\,\text{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$ de donde $\boxed{\text{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}}$

Despejemos $\cos^2 x$ de la expresión (**3**)

$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ de donde $\boxed{\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}}$

Estas identidades son llamadas identidades para $\text{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ en términos de cos 2x

3. Identidad de la tangente de valor doble

Si hacemos lo mismo para la expresión tag (x + y) y hacemos x = y nos queda que:

$$\operatorname{tag}(x+x)=\frac{\operatorname{tag} x+\operatorname{tag} x}{1-\operatorname{tag} x \operatorname{tag} x}=\frac{2 \operatorname{tag}}{1-\operatorname{tag}^2 x}$$

$$\operatorname{tag} 2x=\frac{2 \operatorname{tag} x}{1-\operatorname{tag}^2 x}$$

$$\boxed{\operatorname{tag} 2x=\frac{2 \operatorname{tag} x}{1-\operatorname{tag}^2 x}}$$

4. Identidad para tag ^{2} x en términos de cos 2x

La expresión $\operatorname{tag}^2 x$ puede escribirse así:

$$\operatorname{tag}^2 x=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\frac{1-\cos 2x}{2}}{\frac{1+\cos 2x}{2}}=\frac{2(1-\cos 2x)}{2(1+\cos 2x)}=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

$$\boxed{\operatorname{tag}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$$

Resumen de identidades para el doble de un ángulo

1. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

2. a) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

b) $\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$

c) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

3. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

4. $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

5. $\operatorname{tag} 2x = \frac{2 \operatorname{tag} x}{1-\operatorname{tag}^2 x}$

6. $\operatorname{tag}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1 Si Φ es un ángulo en el segundo cuadrante tal que $\cos \Phi = -\frac{5}{13}$ determinar:

a) $\operatorname{sen} 2\Phi$ b) $\cos 2\Phi$ c) $\operatorname{tag} 2\Phi$

Solución

Determinemos $\operatorname{sen} 2\Phi$

Para calcular $\operatorname{sen} 2\Phi$ usamos la relación $\operatorname{sen} 2\Phi = 2 \operatorname{sen} \Phi \cos \Phi$

Determinemos primero $\operatorname{sen}\Phi$ a través de la identidad fundamental $\operatorname{sen}^2\Phi + \cos^2\Phi = 1$

Como $\cos\Phi = -\frac{5}{13}$ se tendrá al sustituir que:

$$\operatorname{sen}^2\Phi + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

$$\operatorname{sen}^2\Phi + \frac{25}{169} = 1 \qquad \text{(elevando el paréntesis al cuadrado)}$$

$$\operatorname{sen}^2\Phi = 1 - \frac{25}{169} \qquad \text{(despejando } \operatorname{sen}^2\Phi\text{)}$$

$$\operatorname{sen}^2\Phi = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169} \qquad \text{(operando el segundo miembro)}$$

$$\operatorname{sen}\Phi = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} \qquad \text{(extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros)}$$

$$\operatorname{sen}\Phi = \pm\frac{12}{13}$$

Debido a que Φ está en el segundo cuadrante y en éste el seno es positivo se rechaza el valor negativo, tomándose el valor positivo.

Luego $\boxed{\operatorname{sen}\Phi = \frac{12}{13}}$

Finalmente sustituyendo los valores en la expresión $\operatorname{sen}2\Phi = 2\operatorname{sen}\Phi\cos\Phi$ se tendrá que:

$$\operatorname{sen}2\Phi = 2.\frac{12}{13}.\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{120}{169}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}2\Phi = -\frac{120}{169}}$$

b) Determinemos $\cos 2\Phi$

Usamos la relación $\cos 2\Phi = \cos^2\Phi - \operatorname{sen}^2\Phi$

Sustituyendo $\cos\Phi$ y $\operatorname{sen}\Phi$ por sus valores nos queda que:

$$\cos 2\Phi = \left(-\frac{5}{13}\right)^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 \longrightarrow \cos 2\Phi = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -\frac{119}{169}$$

$$\boxed{\cos 2\Phi = -\frac{119}{169}}$$

c) Determinemos $\operatorname{tag} 2\Phi$

Usemos la relación $\operatorname{tag} 2\Phi = \frac{2\operatorname{tag}\Phi}{1-\operatorname{tag}^2\Phi}$

Para determinar $\operatorname{tag} 2\Phi$ debemos obtener $\operatorname{tag}\Phi$ a través de la relación $\operatorname{tag}\Phi = \frac{\operatorname{sen}\Phi}{\cos\Phi}$

Sustituyendo $\operatorname{sen}\Phi$ y $\cos\Phi$ por sus valores se tiene que:

$$\operatorname{tag}\Phi = \frac{\operatorname{sen}\Phi}{\cos\Phi} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5} \longrightarrow \boxed{\operatorname{tag}\Phi = -\frac{12}{15}}$$

Sustituyendo este valor en la expresión $\tan 2\Phi = \frac{2\tan\Phi}{1-\tan^2\Phi}$ nos queda que:

$$\tan 2\Phi = \frac{2.\left(-\frac{12}{5}\right)}{1-\left(-\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{-\frac{24}{5}}{1-\frac{144}{25}} = \frac{-\frac{24}{5}}{\frac{25-144}{25}} \qquad \tan 2\Phi = \frac{-\frac{24}{5}}{-\frac{119}{25}} = \frac{24.25}{119.5} = \frac{120}{119}$$

$$\boxed{\tan 2\Phi = \frac{120}{119}}$$

Ejemplo 2 Verificar la siguiente identidad $\cot A = \frac{1+\cos 2A}{\operatorname{sen} 2A}$

Iniciemos desde el segundo miembro para llegar al primero

$$\frac{1+\cos 2A}{\cos 2A} = \frac{1+(2\cos^2 A-1)}{2\operatorname{sen} A\cos A} = \frac{1-1+2\cos^2 A}{2\operatorname{sen} A\cos A} = \frac{2\cos^2 A}{2\operatorname{sen} A\cos A} = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A} = \cot A$$

Ejemplo 3. Expresar sen⁴ A en términos de valores del coseno con expresiones trigonométricas de primer grado.

Solución

$\operatorname{sen}^4 A = (\operatorname{sen}^2 A)(\operatorname{sen}^2 A)$

$= \left(\frac{1-\cos 2A}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2A}{2}\right)$ utilizando la expresión $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$= \frac{1-2\cos 2A+\cos^2 2A}{4}$ efectuando el producto

$= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2A+\frac{1}{4}\cos^2 2A$ porque $\frac{1-y+z}{4} = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z$

$= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2A+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4A}{2}\right)$ Si $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \longrightarrow \cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$

$= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2A+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4A$ aplicando propiedad distributiva

Como puede notarse, hemos obtenido una expresión de primer grado en función del coseno

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Si A está en el cuarto cuadrante y sabemos que $\operatorname{sen} A = -\frac{24}{25}$ determinar $\operatorname{sen} 2A$

2. Dado que $\operatorname{sen} \Phi = -\frac{3}{5}$ y $\Pi < \Phi < 3\Pi/2$ determinar : a) sen 2Φ b) cos 2Φ c) tag 2Φ

3. Determina el valor de cos 3x en términos de cos x

4. Determinar una expresión para sen 3x en términos de sen x

5. Obtener una expresión para tag 3x en términos de tag x

6. Obtener una expresión para sec 2x en términos de sec x

7. En los ejercicios siguientes escribe la expresión en términos de valores del coseno con expresiones trigonométricas de primer grado: a) $\cos^4 x$ b) $\operatorname{sen}^2 3x \cos^2 3x$

8. Verificar las siguientes identidades:

a) $\cos^4 y - \operatorname{sen}^4 y = \cos 2y$ b) $(\operatorname{sen} A + \cos A)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2A$ c) $2\cos^2 x = \cot x \operatorname{sen} 2x$

d) $\frac{2 \operatorname{tag} A}{1 + \operatorname{tag}^2 A} = \operatorname{sen} 2a$ e) $\frac{\operatorname{tag} A + \cot A}{\cot A - \operatorname{tag} A} = \sec 2A$ f) $\frac{1 + \cos 2A}{1 - \cos 2A} = \cot^2 A$

g) $\frac{1 - \operatorname{tag}^2 \Phi}{1 + \operatorname{tag}^2 \Phi} = \cos 2\Phi$ h) $\frac{\operatorname{sen} 2a}{1 + \cos 2a} = \operatorname{tag} a$ i) $\operatorname{tag} x = \csc 2x - \cot 2x$

j) $\operatorname{tag}\Phi + \cot \Phi = \frac{2}{\operatorname{sen} 2\Phi}$ k) $\operatorname{tag} 2A - \operatorname{tag} A = \operatorname{tag} A . \sec 2A$ ℓ) $\frac{\operatorname{sen} 2x}{1 - \cos 2x} = \cot x$

m) $\frac{2 \cos 2\Phi}{\operatorname{sen} 2\Phi} = \cot \Phi - \operatorname{tag} \Phi$ n) $\frac{\operatorname{sen} 2Y}{1 - \cos 2Y} = \cot Y$ o) $\frac{\operatorname{sen} 2\Phi}{\operatorname{sen} \Phi} - \frac{\cos 2\Phi}{\cos \Phi} = \sec \Phi$

9. Si $\cos 2\Phi = -\frac{3}{5}$ y $90^\circ < \Phi < 180^\circ$ evaluar: a) $\operatorname{sen}\Phi$ b) $\cos\Phi$ c) $\cot\Phi$

10. Expresa sen 4x en función de sen x

11. Si $\operatorname{sen} x = \frac{4}{5}$ y $0 < x < \pi/2$ determinar: a) sen 2x b) cos 2x c) tag 2x

Respuestas

1. $-\frac{336}{625}$ **2.** a) $\frac{24}{25}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{24}{7}$ **3.** $4\cos^3 3x - 3\cos x$ **4.** $\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$

5. $\operatorname{tag}^3 x = \frac{3 \operatorname{tag} x - \operatorname{tag}^3 x}{1 - 3\operatorname{tag}^2 x}$ **6.** $\sec 2x = \frac{\sec^2 x}{2 - \sec^2 x}$ **7.** a) $\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

b) $\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 12x$ **9.** a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{1}{2}$ **10.** $4\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}(\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^2 x)$

11. a) $\frac{24}{25}$ b) $-\frac{7}{25}$ c) $-\frac{24}{7}$

5.10 Identidades para el ángulo medio

Partamos de la identidad $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} \qquad \text{(aplicando raíz cuadrada en ambos miembros)}$$

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\left(\frac{x}{2}\right)}{2}} \qquad \text{(sustituyendo x por } \tfrac{x}{2}\text{)}$$

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

Es de hacer notar que el signo ± no significa que existe dos posibles soluciones. Este signo significa que debemos usar el valor positivo o negativo según el cuadrante donde esté ubicado el ángulo asociado a x/2.

Si observamos el resumen de identidades del doble de un ángulo y aplicamos el mismo procedimiento partiendo de las relaciones $\cos^2 x$ y $\operatorname{tag}^2 x$ obtenemos las identidades siguientes:

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{tag}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

Encontremos otras dos identidades para $\operatorname{tag}\frac{x}{2}$

Para ello partimos de la identidad $\operatorname{tag}\frac{x}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

Si multiplicamos numerador y denominador por $2\operatorname{sen}\frac{x}{2}$ se tendrá que:

$$\operatorname{tag}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\, 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\, 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \quad (\mathbf{1})$$

Sabemos que $\quad 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x \;\; (\mathbf{2}) \quad$ y $\quad 2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \operatorname{sen} x \;\; (\mathbf{3})$

Sustituyendo (**2**) y (**3**) en (**1**) nos queda que:

$$\boxed{\operatorname{tag}\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

Si en la expresión anterior multiplicamos numerador y denominador por (1 + cos x) nos queda que:

$$\operatorname{tag}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\operatorname{sen}x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen}x(1+\cos x)} \quad (\text{porque } (1-\cos x)(1+\cos x)=1-\cos^2 x$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}x(1+\cos x)} \quad (\text{porque } 1-\cos^2 x=\operatorname{sen}^2 x)$$

$$=\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x} \quad (\text{simplificando por sen x})$$

Luego $$\boxed{\operatorname{tag}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}}$$

Resumen de identidades del ángulo medio

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \operatorname{tag}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$\operatorname{tag}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \operatorname{tag}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$$

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1 Determinar el valor exacto de las siguientes funciones: **a)** sen 22,5° **b)** tag 22,5°

Solución:

a) Puede escribirse sen 22,5° = $\operatorname{sen}\frac{45^\circ}{2}$

Si usamos la relación $\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ podemos escribir que:

$$\operatorname{sen}\frac{45^\circ}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{12}}=\pm\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Usamos el signo positivo porque 45° está ubicado en el primer cuadrante, quedándonos:

$\operatorname{sen}\frac{45^\circ}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Luego sen 22,5° = $\operatorname{sen}\frac{45^\circ}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

En cada uno de los ejercicios resuelve el triángulo ABC

1. $b = 18$ $B = 30^\circ$ $A = 133^\circ$ **2.** $A = 36^\circ$ $a = 24$ $b = 34$

3. $B = 38^\circ$ $C = 21^\circ$ $b = 24$ **4.** $A = 116^\circ\ 20'$ $a = 17{,}2$ $c = 13{,}5$

5. $A = 68^\circ\ 30'$ $C = 42^\circ\ 40'$ 23,5 **6.** $B = 118^\circ\ 20'$ $C = 45^\circ\ 40'$ $b = 42{,}1$ m

7. $C = 61^\circ\ 10'$ $c = 30{,}3$ $b = 24{,}2$ **8.** $a = 25{,}2$ $b = 30{,}5$ $A = 54^\circ\ 12'$

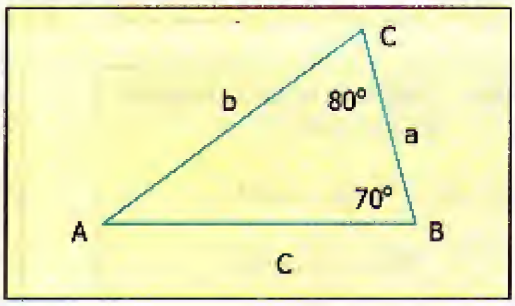
9. En un triángulo cualquiera se da un lado $a = 4{,}6$ y el valor del ángulo opuesto $\alpha = 45^\circ$. Calcular la longitud de un lado b sabiendo que el ángulo opuesto a este lado es $\beta = 60^\circ$.

10. Se tiene un triángulo cuya longitud del lado $c = 88$. Si el ángulo opuesto a este lado viene dado por $\delta = 120^\circ$ y $\alpha = 30^\circ$, calcular la longitud del lado opuesto a α.

11. En un triángulo ABC, la medida del lado $a = 20$ cm. Hallar la longitud del lado b sabiendo que los ángulos en los vértices son $A = 45^\circ$ y $B = 60^\circ$.

12. Se tiene un triángulo cuyos lados miden $c = 5$ cm, $b = 7$ cm, y sabiendo que el ángulo $B = 30^\circ$, calcular el ángulo C.

13. En el triángulo de la derecha se tiene que $a = 42$ cm. Calcular las longitudes de los lados b y c.



Respuestas

1. $C = 17^\circ$ $a = 26{,}3$ $c = 10{,}5$ **2.** $A = 66^\circ\ 50'$ $b = 0{,}0148$ $c = 0{,}0375$

3. $A = 121^\circ$ $a = 33{,}4$ $c = 14$ **4.** $B = 42^\circ\ 30'$ $a = 35{,}6$ $b = 32{,}6$

5. $B = 72^\circ\ 40'$ $a = 4{,}24$ $c = 14{,}3$ **6.** $c = 33{,}8$ $A = 16^\circ$ $a = 13{,}18$

7. $B = 56^\circ\ 20'$ $C = 87^\circ\ 40'$ $c = 40{,}8$ **8.** $\begin{cases} c_1 = 22{,}7 & B_1 = 79^\circ \quad C_1 = 46^\circ\ 48' \\ c_2 = 13 & B_2 = 101^\circ \quad C_2 = 24^\circ\ 48' \end{cases}$

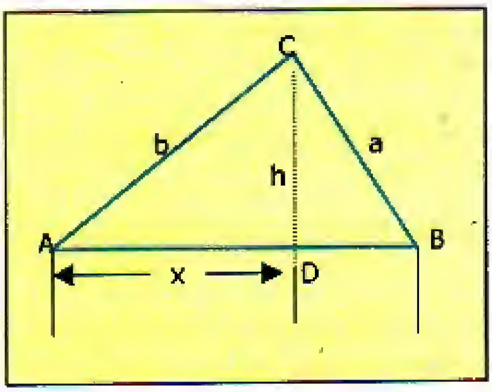
9. $b = 5{,}6$ **10.** $A = 51$ **11.** 24,49 cm

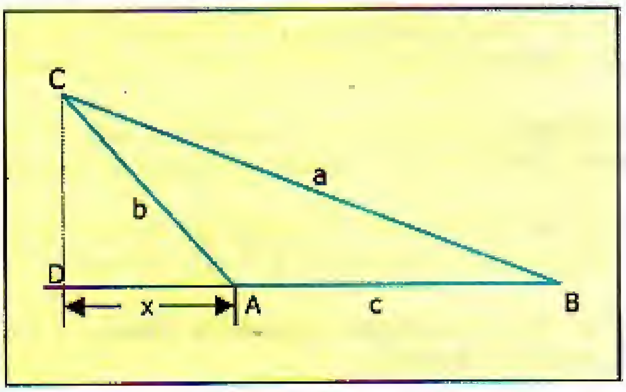
12. 21° 6 **13.** **b** = 78,9 cm c = 82,7 cm

5.14 Teorema del coseno o ley del coseno

En la ley de los senos hemos resuelto triángulos en los cuales conocíamos un lado y dos ángulos o dos lados y un ángulo que no fuera el comprendido entre ellos. Aquí resolveremos triángulos en los cuales se plantea esta última situación, capacitándonos además, para solucionarlos cuando conocemos de ellos únicamente los tres lados.

Para la deducción de la expresión de dicha ley consideraremos dos triángulos, uno acutángulo (el de la izquierda), y otro obtusángulo (el de la derecha).





Al aplicar Pitágoras a los triángulos ACD y BCD se tiene que:

$h^2 = b^2 - x^2$ ....(**1**)

$h^2 = a^2 - (c - x)^2$ ....(**2**)

De (**1**) y (**2**) se tiene que:

$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$

Desarrollando el cuadrado de la diferencia nos queda:

$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 - x^2 + 2xc$

Despejando a^2 y simplificando queda:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2xc$

Como $x = b \cos A$ resulta:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Al aplicar Pitágoras en los triángulos ACD y BCD se tiene que:

$h^2 = b^2 - x^2$ ....(**1**)

$h^2 = a^2 - (x + c)^2$ ......(**2**)

De (**1**) y (**2**) se tiene que:

$b^2 - x^2 = a^2 - (x + c)^2$

Desarrollando el cuadrado de la suma nos queda:

$b^2 - x^2 = a^2 - x^2 - c^2 - 2xc$

Despejando a^2 y simplificando queda:

$a^2 = b^2 + c^2 + 2xc$

Como $x = - b \cos A$ (ya que cos A es negativo) resulta:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Razonando de forma análoga, se obtienen las expresiones siguientes:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos c.$$

Esto nos conduce a enunciar:

En cualquier triángulo, el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de éstos por el coseno del ángulo que forman.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

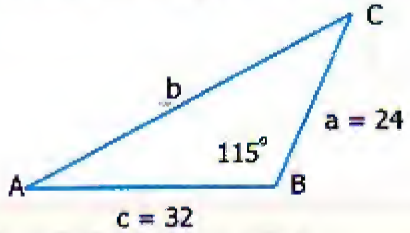
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

El teorema del coseno nos permite resolver triángulos cuando se conocen:

- Dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos
- Los tres lados.

Ejemplo 1. Resolución de un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

En el triángulo ABC de la derecha se tiene que a = 24, c = 32 y el ángulo en el vértice B es 115°. Resolver el triángulo



Solución

Calculemos el lado b a través de la relación:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$b^2 = 24^2 + 32^2 - 2 .24.32 \cos 115°$ (sustituyendo a, c y $\angle B$ por sus valores)

$b^2 = 2249{,}14165$ (efectuando operaciones con la calculadora)

$b = \sqrt{2249{,}14165}$ (extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros)

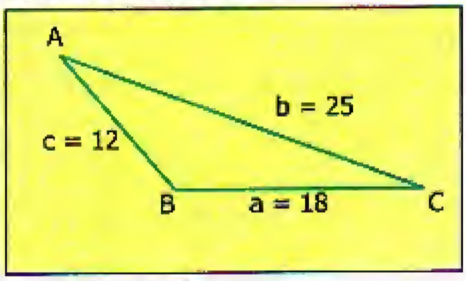
$b = 47{,}4$

Ejemplo 2. Resolución de un triángulo conocidos los tres lados

En el triángulo de la derecha se tiene que:

a = 18 b = 25 c = 12

Resolver el triángulo



Solución

Calculemos el ángulo en el vértice B a través de la relación: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

Despejando cos B se puede escribir: $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$$\cos B = \frac{18^2 + 12^2 - 25^2}{2.18.12} = \frac{324 + 144 - 625}{432} = \frac{-157}{432} = -0{,}363425925$$

$\boxed{B = 110^\circ\ 18'\ 38''}$

Calculemos el ángulo en el vértice usando la relación $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Despejando cos A se puede escribir: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Sustituyendo a, b y c por sus valores se tiene que:

$$\cos A = \frac{25^2 + 12^2 - 18^2}{2.25.12} = \frac{625 + 144 - 324}{600} = \frac{445}{600} = 0{,}741666666 \longrightarrow \boxed{A = 42^\circ\ 7'\ 35''}$$

Calculemos el valor del ángulo en el vértice C

$$C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (42^\circ\ 7'\ 35'' + 110^\circ\ 18'\ 38'') = 180^\circ - 152^\circ\ 26'\ 13''$$

$\boxed{C = 27^\circ\ 33'\ 47''}$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

Resolver cada uno de los siguientes triángulos:

1. $A = 30^\circ$ $b = 12$ $c = 24$ **2.** $A = 133^\circ$ $b = 12$ $c = 15$ **3.** $B = 72^\circ\ 40'$ $c = 16$ $a = 78$

4. $a = 12$ $b = 14$ $c = 20$ **5.** $a = 3{,}3$ $b = 2{,}7$ $c = 2{,}8$ **6.** $a = 2{,}2$ $b = 4{,}1$ $c = 2{,}4$

7. $a = 11{,}2$ $b = 15{,}3$ $C = 116^\circ\ 24'$ **8.** $a = 2045$ $c = 31{,}26$ $B = 10^\circ\ 31'\ 12''$

9. $a = 28{,}4$ $b = 40{,}3$ $c = 25{,}7$ **10.** $b = 10$ $c = 8$ $A = 72^\circ$

11. En un triángulo los lados miden a = 3 cm, b = 5 cm y c = 6 cm. Calcular los tres ángulos.

Respuestas

1. $a = 14{,}9$ $B = 23^\circ\ 40'$ $C = 126^\circ\ 20'$ **2.** $a = 24{,}8$ $B = 20^\circ\ 40'$ $C = 26^\circ\ 20'$

3. $b = 74{,}8$ $A = 95^\circ\ 30'$ $C = 11^\circ\ 50'$ **4.** $A = 36^\circ\ 10'$ $B = 43^\circ\ 30'$ $C = 100^\circ\ 20'$

5. $A = 73^\circ\ 40'$ $B = 51^\circ\ 50'$ $C = 54^\circ\ 30'$ **6.** $A = 25^\circ\ 40'$ $B = 126^\circ$ $C = 28^\circ\ 20'$

7. $A = 26^\circ\ 24'$ $B = 37^\circ\ 12'$ $c = 22{,}6$ **8.** $A = 18^\circ\ 30'\ 36''$ $C = 150^\circ\ 58'\ 12''$ $b = 1176$

9. $A = 44^\circ\ 12'$ $B = 96^\circ\ 12'$ $C = 39^\circ\ 18'$ **10.** $a = 10{,}7$ $C = 45^\circ\ 19'\ 20''$ $B = 62^\circ\ 40'\ 40''$

11. $A = 29^\circ\ 54'$ $B = 56^\circ\ 18'$ $C = 93^\circ\ 18'$

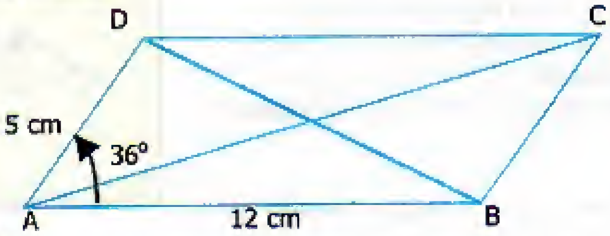
Problemas de aplicación

Problema 1

Los lados de un paralelogramo tienen longitudes de 5 cm y 12 cm. Si ellos forman entre sí un ángulo de 36°, calcular la longitud de las diagonales.

Solución

La figura de la derecha muestra el paralelogramo con las condiciones del enunciado del problema.
Para calcular la longitud de la diagonal BD aplicamos la ley del coseno.



$(BD)^2 = (AD)^2 + (AB)^2 - 2(AD).(AB) \cos A$

$(BD)^2 = (5 \text{ cm})^2 + (12 \text{ cm})^2 - 2 (5 \text{ cm}) (12 \text{ cm}) \cos 36°$

$(BD)^2 = 71{,}918 \text{ cm}^2 \longrightarrow BD = \sqrt{71{,}918 \text{ cm}^2} \longrightarrow \boxed{BD = 8{,}48 \text{ cm}}$

Para calcular la diagonal AC debemos primero obtener el ángulo en el vértice B

$36° + B = 180° \longrightarrow B = 180° - 36° \longrightarrow B = 144°$

La longitud de la diagonal AC vendrá dada por la ley del coseno así:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2 (AB)(BC) \cos B$

$(AC)^2 = (12 \text{ cm})^2 + (5 \text{ cm})^2 - 2 (12 \text{ cm}) (5 \text{ cm}) . \cos 144°$

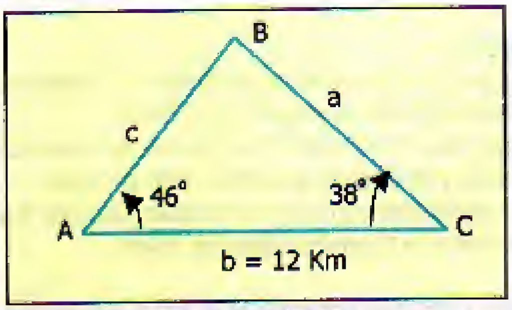
$(AC)^2 = 266{,}08 \text{ cm}^2 \longrightarrow AC = \sqrt{266.08 \text{ cm}^2} \longrightarrow \boxed{AC = 16{,}31 \text{ cm}}$

Problema 2

Para medir la distancia entre dos colinas A y B; desde un tercera colina C ubicada a 12 Km de A, se miden los ángulos A y C, los cuales son respectivamente 46° y 38° ¿Qué distancia existe entre A y B?.

Solución

La figura mostrada a la derecha representa las condiciones del problema.
El valor del ángulo en B viene dado así:
$B = 180° - (46° + 38°) = 180° - 84°$
$B = 96°$

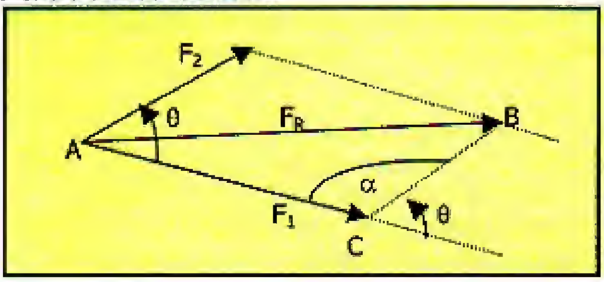


Para calcular la distancia AB = c usamos el teorema del seno, pudiéndose escribir:

$$\frac{\text{sen}\,38°}{c} = \frac{\text{sen}\,96°}{12 \text{ Km}} \longrightarrow c = \frac{12 \text{ Km} . \text{sen}\,38°}{\text{sen}\,96°} \longrightarrow \boxed{c = 7{,}42 \text{ Km}}$$

Problema 3

Dos fuerzas $F_1 = 14$ N y $F_2 = 6$ N están actuando sobre un mismo punto. Si la fuerza resultante es de 17 N, calcular el valor del ángulo formado entre dichas fuerzas.



Solución

Observemos la figura de la derecha donde se muestran las condiciones del problema: $F_1 = 14$ N $F_2 = 6$ N.
La idea es calcular el valor del ángulo θ

Observemos que el ángulo formado entre las fuerzas F_1 y F_2 es igual al ángulo exterior en el vértice C (ángulos correspondientes, los cuales son iguales). Esto nos indica que debemos calcular inicialmente el valor del ángulo α para luego obtener el valor de θ.

Usemos el teorema del coseno así: $F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2\,F_1.F_2 \cos C$

Despejando cos C se tiene que: $\cos C = \dfrac{F_1^2 + F_2^2 - F_R^2}{2F_1 . F_2}$

Sustituyendo F_1, F_2 y F_R por sus valores se tendrá que: $\cos C = \dfrac{(14N)^2 + (6N)^2 - (17N)^2}{2.(14N).(6N)}$

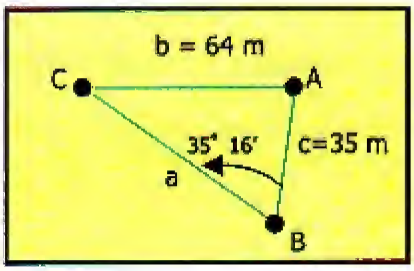
$\cos C = \dfrac{196\,N^2 + 36\,N^2 - 289\,N^2}{168\,N^2} \longrightarrow \cos C = -0{,}339285714 \longrightarrow \boxed{C = 109^\circ\ 50' = \alpha}$

El valor del ángulo θ lo determinamos despejando de la relación: $\theta + \alpha = 180^\circ$

$\theta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 109^\circ\ 50' \longrightarrow \boxed{\theta = 70^\circ\ 10'}$

Problema 4

Se tienen dos boyas distantes 64 m una de la otra. Un barco se encuentra a 35 m de la boya más cercana y el ángulo formado por las visuales desde el barco a las boyas es de 35° 16'. Calcular la distancia que separa al barco de la boya ubicada más lejos de él.



Solución

La figura de la derecha representa las condiciones del enunciado del problema. b = 64 m
Se trata de un triángulo en el que se conocen los dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
La ubicación del barco está representado por B y los puntos A y C representan las boyas.

Primero debemos determinar el valor del ángulo en C

Para ello usamos la relación referida al teorema del seno $\dfrac{64m}{\operatorname{sen} 35^\circ 16'} = \dfrac{35m}{\operatorname{sen} C}$

Despejando sen C se tiene que: $\operatorname{sen} C = \dfrac{35m.\operatorname{sen} 35^\circ 16'}{64m} \longrightarrow \operatorname{sen} C = 0{,}315756173$

$C = 18^\circ\ 24'\ 23''$

Para determinar el valor del ángulo en el vértice A se tendrá que:

$A + B + C = 180^\circ$ de donde $A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (35^\circ 16' + 18^\circ 24' 23'')$

$$\boxed{A = 126^\circ 19' 37''}$$

Por último determinamos la longitud del lado a usando la relación $\dfrac{a}{\text{sen}\,126^\circ 19' 37''} = \dfrac{64\text{ m}}{\text{sen}\,35^\circ 16'}$

Despejando a se tiene que:

$$a = \frac{64\text{m}.\text{sen}\,126^\circ\, 19' 37''}{\text{sen}\ 35^\circ\ 16'} \longrightarrow \boxed{a = 89{,}3\text{ m}}$$

Problema 5

Dos aviones salen de un mismo punto, el uno hacia el oeste y el otro a 20° al este del norte; el primero con una velocidad de 280 Km/h y el segundo con una velocidad de 350 Km/h. ¿A qué distancia se encuentra uno del otro al cabo de 2 horas de vuelo?.

Solución

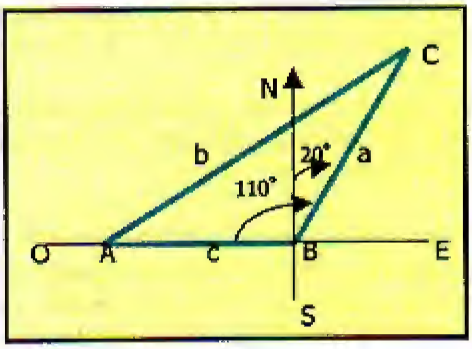
En la figura se muestran las condiciones del problema en el cual aparece dibujada la dirección de 20° al este del norte, tomando a partir del norte 20° hacia el este. De la misma forma se muestra la dirección hacia el oeste sobre el eje horizontal.

a: distancia recorrida por el avión que viaja a 350 Km/h en dos horas:
$a = 350$ Km/h . 2 h = 700 Km

c: distancia recorrida por el avión que viaja en dirección oeste a razón de 280 Km/h.
$c = 280$ Km/h . 2 h = 560 Km

$\angle$ B: ángulo que forman las direcciones de los dos aviones.

b: distancia desconocida que separa los aviones



El ángulo en el vértice B tiene como valor $B = 90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$
Usando el teorema del coseno podemos escribir que

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\, a\, c \cos B$

$b^2 = (700\text{ Km})^2 + (560\text{ Km})^2 - 2.\ 700\text{ Km}\ .\ 560\text{ Km}\ .\ \cos 110^\circ$ (sustituyendo valores)

$b = 1035{,}25$ Km. (efectuando operaciones y extrayendo raíz cuadrada)

Luego podemos decir que los dos aviones están separados 1035,25 Km. al cabo de 2 horas.

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

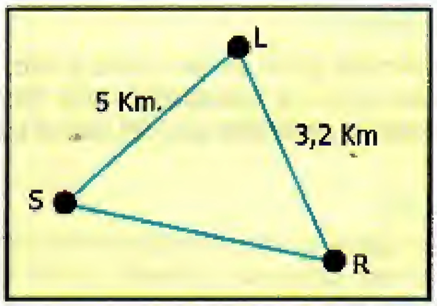
1. Un triángulo tiene lados que tienen longitudes de 34 cm, 23 cm y 42 cm. ¿Cuál es el valor del ángulo menor? **R** 33°

2. Se tiene un paralelogramo cuyos lados miden 10,3 cm y 23,2 cm. Si uno de los ángulos mide 54° 12′, calcular la longitud de la diagonal mayor. **R**: 30,4 cm

3. Un pedazo de alambre de 5,5 m de longitud se dobla para formar un triángulo. Un lado tiene 1,5 m de longitud y otro 2 m de longitud. Hallar los ángulos del triángulo. **R:** 68°, 68°, 44°

4.Las dos diagonales de un paralelogramo tienen longitudes de 34,4 cm y 20,3 cm y forman un ángulo de 118°° 36′ . ¿Cuánto mide el perímetro del paralelogramo?. **R**: 78,2 cm

5. La figura de la derecha muestra un barco localizado en el punto S, una roca en el punto R y el faro localizado en el punto L. El ángulo desde L hacia las líneas de visión de S y R es 66° 7′ 36″. Calcular: a) la distancia desde el barco hasta la roca b) el ángulo desde R hacia las líneas de visión de L y S. c) el ángulo desde S hacia las líneas de visión de L y R.



R: a) 4,8 Km b) 76° 18′ 39,17″ c) 37° 33′ 45,3″

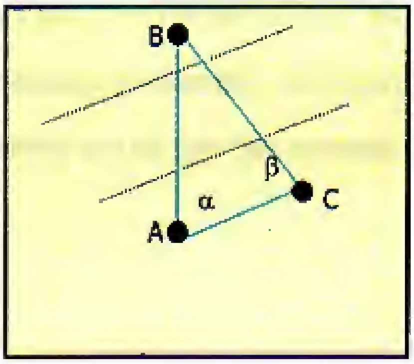
6. Calcular los lados de un paralelogramo sabiendo que la diagonal mide 96 cm y los ángulos que forman con los lados son 40° y 35° **R**: 57 cm y 63,87 cm

7. Dos aviones parten del mismo aeropuerto, uno hacia el norte con una velocidad de 240 Km/h y el otro a 40° al este del norte con una velocidad de 320 Km/h. ¿Qué distancia los separa luego de 2 horas de vuelo?. **R:** 411, 5 Km

8. Se tienen dos fuerzas de 50 Newton y 60 Newton actuando sobre un mismo punto. La primera actúa en una dirección cuyo ángulo respecto a la horizontal es de 20° y la otra en una dirección que forma con el mismo eje un ángulo de 80°. Hallar la magnitud de la fuerza resultante y el ángulo que forma con la horizontal. **R**: 95,39 Newton y 3° 2′ 28″

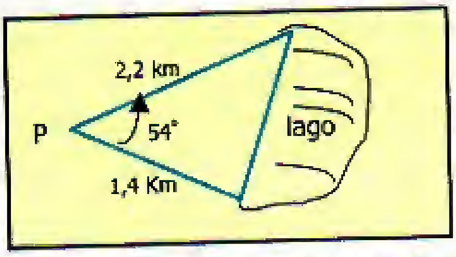
9. Hallar el ángulo que forman las direcciones de dos aviones que parten de un mismo punto y que al cabo de 3 horas están separados entre sí una distancia de 520 Km, sabiendo que sus respectivas velocidades son 380 Km/h y 420 Km/h. **R**: 24° 22′ 17″

10. En la figura de la derecha se muestran las orillas opuestas de un río, donde se colocan señales en los puntos A y B. En la orilla donde está ubicado el punto A y a una distancia de 300 m se coloca una tercera señalización. Al medir los ángulos en A y C se obtienen respectivamente los valores α = 124° 40′ y β = 45° 30′ . Calcular la distancia entre las señalizaciones A y B **R**: 1253 m



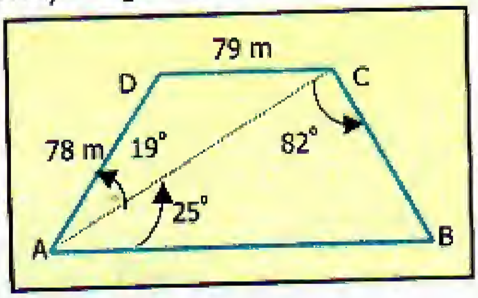
11. Un pasajero viaja en un auto a 60 Km/h hacia una montaña. En un momento dado observa que el ángulo de elevación hacia la cima de la montaña es de 12°, pero cinco minutos después mide el ángulo de elevación como 18° .¿Cuál es la altura de la montaña?. **R:** 3,1 Km

12. En la figura de la derecha se muestra un punto P ubicado a 1,4 Km. de la orilla de un lago y 2,2 Km. de la otra orilla. Si en P el lago subtiende un ángulo de 54°, calcular la longitud del lago. **R:** 1,78 Km



13. Los lados de un paralelogramo miden 15,6 cm y 33 cm. Si uno de los ángulos mide 42° 36', calcular la longitud de la diagonal menor y el valor del mayor ángulo. **R:** 23,97 cm y 137° 27' 22"

14. La figura de la derecha muestra un terreno en forma de trapezoide ABCD, donde AB es paralela a CD. Para medir los linderos AB y BC se ha optado por trazar los ángulos representados en la figura, teniendo como vértices los puntos A y C. Calcular el perímetro del terreno.



R: 401,08 m

15. Dos líneas rectas se cortan en un punto P, formándose en dicho punto un ángulo de 42° 36' Sobre una de las líneas se ubica un punto R a 368 m de P y sobre la otra línea se ubica un punto S a 426 m de P. Calcula la distancia desde R hasta S. **R:** 293,44 m

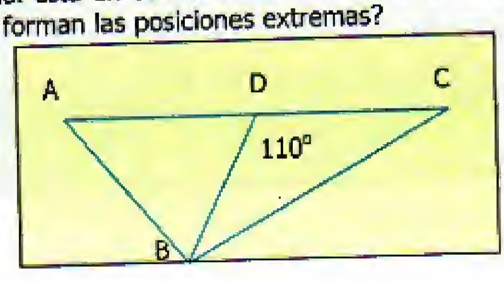
16. Un barco navega desde un punto A durante 2 horas con una velocidad de 16 Km/h con curso de 65° al este del norte y después cambia su curso a 15° al este del norte desplazándose a la misma velocidad durante 3 horas. ¿A qué distancia se encuentra el barco del punto A?.
R: 68,02 Km

17. ¿Cuál es el ángulo entre las direcciones que forman dos aviones que parten del mismo punto y que al transcurrir de 3 horas se encuentran separados entre sí 520 Km, sabiendo que sus velocidades son 380 Km/h y 420 Km/h respectivamente. **R:** 24° 22' 18"

18. Dos automóviles parten del mismo punto en el mismo instante y a la misma velocidad en direcciones que forman entre sí un ángulo de 40° . Al transcurrir tres horas de movimiento los separa una distancia de 164,2 Km. Calcular la velocidad con la cual se desplazan dichos automóviles. **R:** 80 Km/h

19. Se tiene un péndulo de 34 cm de longitud, el cual está en oscilación alcanzando una longitud entre las posiciones extremas de 12 cm. ¿Qué ángulo forman las posiciones extremas?
R: 20° 19' 43"

20. En el triángulo de la derecha se tiene que:
AB = 2,5 cm BD = 2 cm BC = 4 cm
Calcular el valor de AC
R: 5.18 cm



Actividades complementarias

1. Sabiendo que cos α = -5/13, que el ángulo α pertenece el tercer cuadrante, que sen β = 3/5 y que β pertenece al segundo cuadrante, calcular sen ($\alpha + \beta$) y cos ($\alpha - \beta$)

R: sen ($\alpha + \beta$) = 33/65 cos ($\alpha - \beta$) = -15/65.

2. Partiendo de las razones de los ángulos notables conocidos hallar:

a) sen 15° b) cos 15° c) tag 15° d) sen 75° e) cos 75° f) tag 75°

R: a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ c) $2-\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ f) $2+\sqrt{3}$

3. Un ángulo del primer cuadrante verifica que sen α = 1/3. Hallar:

a) sen 2α b) cos 2α c) tag 2α **R**: a) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ b) 7/9 c) $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

4. Calcular: a) $\frac{\text{sen}70° + \text{sen}50°}{\cos 70° + \cos 50°}$ b) $\frac{\text{sen}75° + \text{sen}15°}{\cos 75° + \cos 15°}$

R: a) $\sqrt{3}$ b) 1

5. Dado sen α = 3/5 y cos $\beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, calcular: a) sen ($\alpha - \beta$) b) cos ($\alpha + \beta$) c) tag ($\alpha - \beta$)

R: a) $\frac{\sqrt{13}}{65}$ b) $\frac{6\sqrt{13}}{65}$ c) 1/18

6. Comprueba que se verifican las siguientes igualdades:

a) sen 44° – sen 22° = - 2 cos 147° . sen 11°

b) cos 70° – cos 50° = 2 sen 300° . sen 10°

c) sen 75° – cos 75° = 2 cos 45°. sen 30°

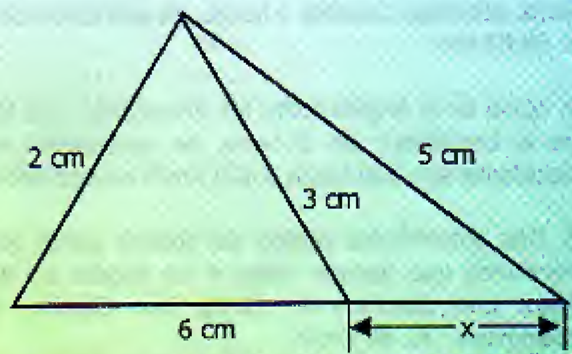
7.

Selecciona la respuesta correcta

En el triángulo de la derecha el valor de x está representado por

a) x = 1,7 cm b) x = 2,2 cm

c) x = 1.5 cm



8. Usando las fórmulas del el seno y el coseno de una suma expresar el sen 3 x y cos 3x en función de las razones del ángulo x

R: sen 3 x = 3 sen x $\cos^2$ x – sen^3 x

cos 3 x = $\cos^3$ x – 3 cos x sen^2 x

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

6.1 La función seno

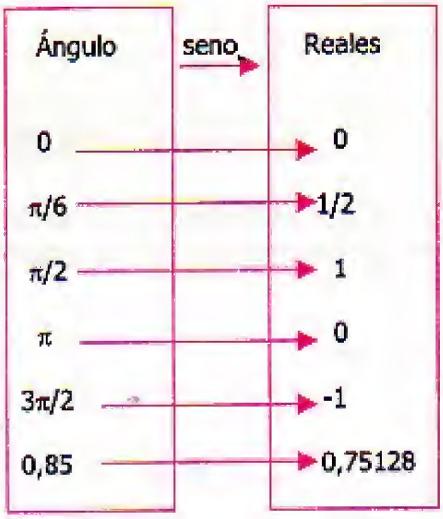
Obsérvese el diagrama de la derecha.

En él se muestra la correspondencia que existe entre la medida de los ángulos expresados en radianes y las razones trigonométricas de los senos.

En esta correspondencia se observa que existe una función, ya que "todo ángulo tiene un seno y sólo uno". Esta función es llamada **seno**.

Para obtener la imagen, según la función seno del ángulo 0,85, se busca el seno del ángulo de 0,85 radianes, el cual es: 0,75128, pudiéndose escribir que:

sen 0,85 = 0,75128



Nótese que la imagen de la función seno de 0,85 es el real 0,75128.

Los valores del conjunto de partida son **números reales** y sus imágenes también son **números reales.**

Todo lo expresado anteriormente nos facilita el camino para definir la función seno de la manera siguiente:

> La función seno es una función real de variable real tal que a cada ángulo α, expresado en radianes, se le hace corresponder un número real denotado como sen α

$$\text{sen}: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \text{ tal que sen}(\alpha) = y$$

Esto significa que, **a cada número real** α le asignamos otro **número real** llamado **sen** α, de tal manera que:

El conjunto de partida **R** es igual al dominio de la función seno.

El codominio de la función es el conjunto de los números reales.

El rango o conjunto de imágenes es el intervalo [-1, 1].

Cada número real del dominio tiene una única imagen en el codominio.

Gráfica de la función seno

La función seno es de la forma **f(x) = sen x**. Es fácil formar una tabla de valores, para ello basta con introducir en la calculadora un ángulo en grados o en radianes y pulsar la tecla **sen.**

Para tratar de representar la función seno formamos una tabla de valores, dándole valores a x preferiblemente en radianes, comprobando con la calculadora científica estos valores redondeados a dos decimales, ayudándonos a trazar la gráfica.

x grad	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	240	270	300	315
x rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$
sen x	0	0,5	0,71	0,87	1	0,87	0,71	0,5	0	- 0,5	- 0,87	-1	- 0,87	- 0,71

Al ubicar los puntos se denotará al eje horizontal por x, y al eje vertical por sen x. Esto nos permite obtener una gráfica como la mostrada a continuación en la figura 6.1

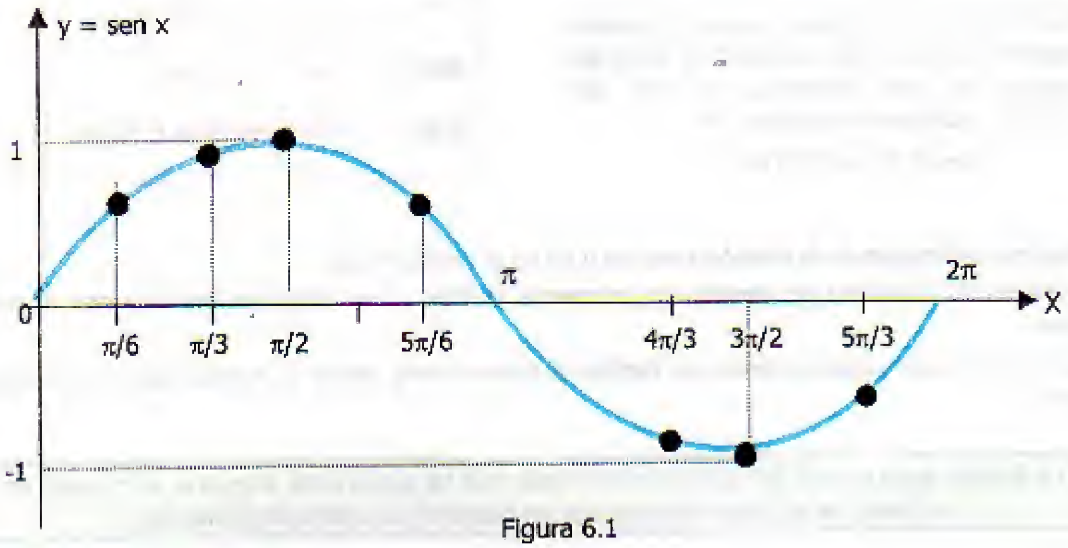


Figura 6.1

Análisis de la gráfica

En la gráfica de la figura 6.1 podemos observar los siguientes aspectos:

A medida que el ángulo crece de 0 a $\pi/2$, los valores del seno crecen de 0 a 1; por lo tanto la curva es **creciente** en este intervalo y sus valores son positivos. El **máximo** ocurre cuando $x = \pi/2$.

A medida que el ángulo crece de $\pi/2$ a π, los valores del seno varían de 1 a 0. En este intervalo la curva es **decreciente** y sus valores son positivos.

A medida que el ángulo crece entre π y $3\pi/2$ los valores del seno varían de 0 a -1. En este intervalo la curva es **decreciente** y sus valores son negativos. El **mínimo** valor se obtiene cuando $x = 3\pi/2$.

A medida que el ángulo crece entre $3\pi/2$ y 2π los valores del seno varían entre -1 y 0; por lo tanto, la curva es **creciente** y sus valores son negativos.

La función sen x es **continua** para el intervalo 0 a 2π. Esto nos indica que no tiene roturas en su gráfica.

A esta gráfica se le llama **curva senoidal** o **sinusoide.** También se le dice **onda senoidal**

Propiedades o características de la función seno

A partir de la gráfica de la función seno es posible observar las siguientes características:

- **Es periódica** de período 2π, ya que sen $(x + 2\pi)$ = sen x. Esto significa que desde $x = 2\pi$ comienzan a repetirse los valores de sen x, iniciando la curva un nuevo ciclo que se repite cada 2π radianes. Obsérvese la figura 6.2

  A la porción que corresponde a un período se le llama **ciclo.** Obsérvese la figura 6.2. Recordemos, que una función es **periódica** si los valores que toma se repiten cada cierto intervalo.
- **Es impar**, ya que sen (-x) = -sen x. Esta condición la cumplen las funciones impares cuando se verifica que f(-x) = -f(x). Esto también nos indica que es **simétrica** respecto del origen
- **No es inyectiva**, ya que por ejemplo, sen$(\pi/6)$ = 1/2 y sen $(5\pi/6)$ =1/2
- **No es sobreyectiva,** ya que el rango no es igual al codominio.

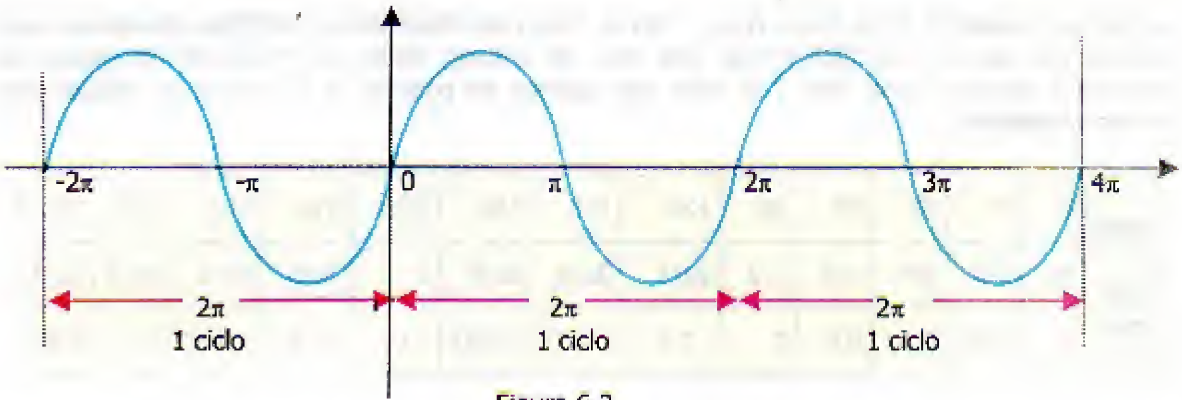


Figura 6.2

Cuando la función se considera definida en todo el conjunto **R**, se observa que su gráfica es una repetición del tramo que hay en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Es, precisamente, la periodicidad de la función la que nos permite ampliar la gráfica para valores menores que cero o mayores que 2π.

La propiedad dada como sen$(x + 2k\pi)$ = sen x, para todo k entero, indica que el valor de la función seno es la misma para x, $x + 2\pi$, $x + 4\pi$, $x + 6\pi$, etc.

Las funciones que, en el caso del seno, se repiten a intervalos regulares son llamadas **funciones periódicas.**

Una función f(x) se dice que es **periódica** si existe un número real T distinto de cero, llamado período tal que

f(x + T) = f(x) para todo x perteneciente al dominio de f.

6.2 La función coseno

Si hacemos observaciones análogas, a las realizadas para la función seno, puede escribirse la definición para la función coseno así:

> La función coseno es una función real de variable real, tal que a cada ángulo α medido en radianes se le hace corresponder un número real denotado como cos α

$$\cos: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \text{ tal que } \cos(\alpha) = y$$

Esto significa que a cada número real α le asignamos otro número real llamado cos α, de tal manera que:

El conjunto de partida **R** es igual al dominio de la función coseno.

El codominio de la función es el conjunto de los números reales.

El rango o conjunto de imágenes es el intervalo [-1, 1].

Cada número real del dominio tiene una única imagen en el codominio.

Gráfica de la función coseno

La función coseno es de la forma **f(x) = cos x**. Todas las calculadoras científicas incorporan esta función, por eso es muy fácil formar una tabla de valores; basta con introducir un ángulo en radianes y pulsar la tecla **cos**, y el valor que aparece en pantalla es el coseno del ángulo que hemos introducido.

x grad	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	240	270	300
x rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$
cos x	1	0,87	0,71	0,5	0	- 0,5	- 0,71	- 0,87	- 1	- 0,87	- 0,50	0	0,50

Al ubicar los puntos, se denotará al eje horizontal por x, y al eje vertical por cos x. Esto nos permite obtener una gráfica como la mostrada a continuación en la figura 6.3

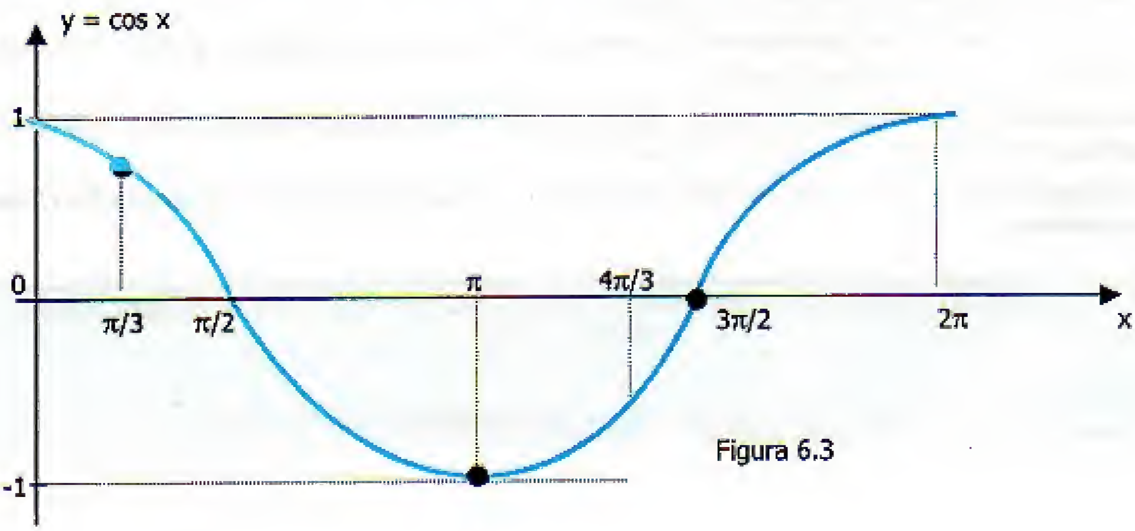


Figura 6.3

Análisis de la gráfica

En la gráfica de la figura 6.3 podemos observar los siguientes aspectos:

A medida que el ángulo crece de 0 a $\pi/2$, los valores del coseno decrecen de 1 a 0. Esto nos indica que la curva es **decreciente** y sus valores son positivos.

A medida que el ángulo crece de $\pi/2$ a π, los valores del coseno varían de 0 a -1 y la curva es **decreciente**, obteniéndose el valor **mínimo** para $x = \pi$.

A medida que el ángulo crece de π a $3\pi/2$, los valores del coseno varían de -1 a 0. Esto nos indica que la curva es **creciente** y sus valores son negativos.

A medida que el ángulo crece entre $3\pi/2$ y 2π, los valores del coseno son positivos y varían entre 0 y 1. En este caso la curva es **creciente**, obteniéndose el valor **máximo** en $x = 2\pi$

A esta gráfica se le llama **cosinusoide.**

Propiedades o características de la función coseno

Partiendo de la gráfica de la función coseno pueden observarse las características siguientes:

Es periódica de período 2π, ya que $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Esto significa que desde $x = 2\pi$ comienzan a repetirse los valores de cos x, iniciando la curva un nuevo ciclo que se repite cada 2π radianes.

Es par, ya que $\cos(-x) = \cos x$, condición esta que cumplen las funciones pares cuando se verifica que $f(-x) = f(x)$. Esto también nos indica que es **simétrica** respecto al eje de ordenadas.

No es inyectiva, ya que, por ejemplo, $\cos(\pi/4) = \cos(21\pi/4)$. Es decir, ángulos diferentes tienen el mismo valor.

No es sobreyectiva, ya que el rango no es igual al codominio.

El **valor máximo** es 1 y lo alcanza en $x = 0$. El **valor mínimo** es -1 y lo alcanza en $x = \pi$.

El dominio es el conjunto de los números reales.

El recorrido es el intervalo $[-1, 1]$.

Es continua en todo su dominio.

6.3 La función tangente

La función tangente se puede definir de la manera siguiente:

La función tangente es una función de variable real definida como el cociente; $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, siendo cos x distinto de cero 0, denotado por $f(x) = \text{tag}\, x$, de forma tal que a cada ángulo, expresado en radianes, le haga corresponder el valor de su tangente.

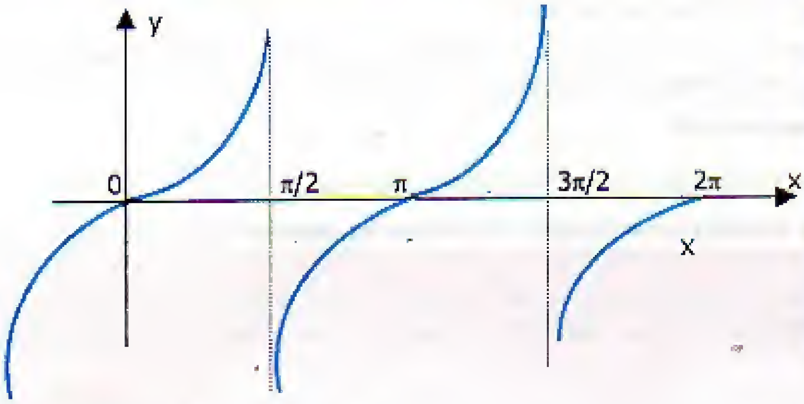
A diferencia de las funciones anteriores (seno y coseno), la función tangente no existe para cualquier número real x, es decir, no está definida para los valores x tales que $\cos x = 0$. Ello ocurre cuando x es un número impar de veces $\pi/2$, por lo que se tendrá que el dominio de la función es:

$$\text{Dom}\, f = R - \left\{x = (2k+1)\,.\,\pi/2\,,\ k \in Z\right\}$$

Gráfica de la función tangente

Formemos la tabla de valores usando una calculadora, donde la variable x se exprese en radianes. Recuerde que la calculadora debe estar en el modo radianes

x grad	0	30	45	60	90	135	180	225	270	315	360
x rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
sen x	0	0,58	1	1,73	-	- 1	0	1	-	- 1	0



En $\pi/2$ y en $3\pi/2$ la calculadora nos indica error, ya que en estos puntos la tangente no está definida.

La función corta al eje OX en los puntos siguientes:

$X = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

Análisis de la gráfica

Para $x < \pi/2$, cuanto más nos acercamos a $\pi/2$, los valores de las tangentes son positivas y cada vez mayores.

Para $x > \pi/2$, cuanto más nos acercamos a $\pi/2$, los valores de las tangentes son negativas y cada vez menores.

En $x = \pi/2$ hay una **asíntota vertical** y no corta la curva.

En $x = 3\pi/2$ existe otra **asíntota vertical** que tampoco corta la curva.

La gráfica representada en la figura 6.4 es la función $f(x) = \text{tag } x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

Propiedades o características de la función tangente

Es periódica, de período π, ya que $\text{tag } x = \text{tag}(\pi + x)$. Repite los valores cada intervalo de π radianes.

Es impar, es decir, es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Los ceros se determinan haciendo $\text{tag } x = 0$, cumpliéndose esto para $x = n\pi$ con n entero

El dominio está formado por $R - \{\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \pm 9\pi/2, \ldots\ldots\}$ valores que anulan la función.

El rango de la función es $(-\infty, +\infty)$. Es decir, todos los números reales.

No es inyectiva, ya que $\text{tag}(\pi/4) = \text{tag}(5\pi/4)$.

Es sobreyectiva, puesto que la función toma todos los valores reales.

No tiene **máximos** ni **mínimos**.

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Representa gráficamente la función y = sen x en el intervalo [$-\pi$, π]. Para ello ayúdate de una calculadora y una tabla de valores.

Teniendo en cuanta la gráfica de la función seno, representa las funciones siguientes:

a) y = sen x – 2   b) y = sen (x + π/4)   c) y = sen(x - π/2)   d) y = 3 sen x

2. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) f(x) = sen 3x   b) f(x) = - sen x   c) f(x) = sen 4 x   d) f(x) = f(x) = sen (- 2x)

3. Dibuja la gráfica de la función y = cos x en el intervalo [- 2π, 2π]. Construye una tabla de valores.

4. Representa gráficamente las funciones siguientes:

a) y = cos x + 1   b) y = cos (x - π/4)   c) y = cos x – 2   d) y = cos (x + π/4)

5. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) f(x) = cos 4 x   b) f(x) = - cos x   c) y = cos 2x

6. Indica cuáles de los ángulos siguientes no pertenecen al dominio de la función f(x) = tag x:

$7\pi/4$, $32\pi/5$, 324°, 32π, $15\pi/4$, 900° y 990°.

7. Utiliza la calculadora para construir una tabla de valores que te permita representar, de forma precisa, la función definida como y = tag x en el intervalo [$-\pi/2$, $\pi/2$].

8. ¿En cuáles intervalos es decreciente la función coseno?

9. ¿En cuáles intervalos es creciente la función tangente?

10. Haz una lista de 10 fenómenos naturales que sean periódicos

11. ¿En qué consiste un electrocardiograma?.

12. Los latidos del corazón constituyen un fenómeno esencialmente periódico y de gran importancia. Haz una descripción de las anomalías o arritmias del corazón, especificando el período en cada uno de los casos. Investiga las gráficas de los electrocardiogramas correspondientes a esas anomalías con el fin de observar la periodicidad.

6.4 Funciones trigonométricas inversas

Necesitamos estudiar ahora las inversas de las funciones trigonométricas, es decir, aquéllas funciones que permiten hallar, conocidos el seno, el coseno o la tangente, el valor en radianes del ángulo correspondiente. Veamos:

sen $\alpha = \frac{1}{2}$ significa que α representa cualquier ángulo cuyo seno vale $\frac{1}{2}$. De esta forma, α puede tomar los siguientes valores: 30°, 150°, 390° etc.

Matemáticamente podemos escribir esto como sigue:

$$30^\circ = \text{sen}^{-1}\frac{1}{2} \text{ equivale a decir: } 30^\circ = \text{arc sen}\frac{1}{2}$$

$$150^\circ = \text{sen}^{-1}\frac{1}{2} \text{ equivale a decir: } 150^\circ = \text{arc sen}\frac{1}{2}$$

A estas funciones se les llama **funciones trigonométricas inversas.**

Cuando se hizo el estudio de las funciones se mostró, aplicándose **el criterio de la recta horizontal**, que las funciones biyectivas tienen una inversa.

Este criterio, al ser aplicado en cada una de las funciones trigonométricas estudiadas, no se cumple, ya que a cada valor de su dominio le corresponde más de un valor de su codominio (toda recta horizontal corta a la gráfica en más de un punto). Esto se debe a que **las funciones trigonométricas no son inyectivas** y, como consecuencia, sus inversas no son funciones.

Por tanto, para poder definir sus funciones inversas, debe ser restringido el dominio a un subconjunto de los números reales en el que sean inyectivas y sobreyectivas, para que puedan ser biyectivas

Función Arcoseno

La función f(x) = sen x, que hemos estudiado, definida de R en [-1, 1] no es inyectiva. Esto se explica, porque toda recta horizontal que corte su gráfica lo hace en infinitos puntos. Para hacerla inyectiva se restringe su dominio y se define así: f: $[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$

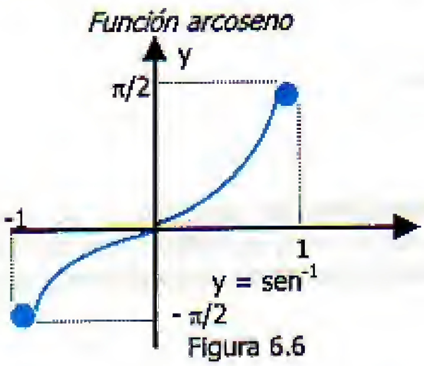


Figura 6.6

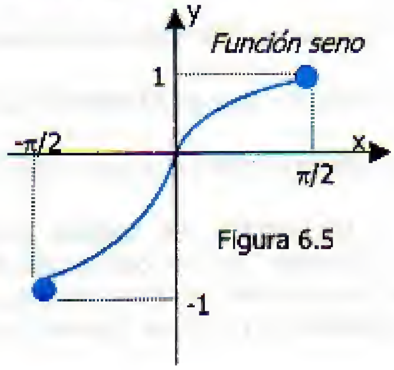


Figura 6.5

Como puede verse en la gráfica de la figura 6.5, ella está representando a la función y = sen x.

Ella está restringida en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Esta condición la convierte en una función biyectiva y como tal debe admitir una función inversa que recibe el nombre de **función arcoseno.** Fig 6.6.

En general decimos:

La función **seno inverso o arco seno**, denotada por sen^{-1}, está definida como sigue:

$y = sen^{-1} x$ si y sólo si $x = sen\, y$ con Dom = $[-1, 1]$ y Rango = $[-\pi/2, \pi/2]$

Función arco coseno o coseno inverso

La función $f(x) = \cos x$, definida de R en $[-1, 1]$ no es inyectiva. Una recta horizontal que corte a su gráfica lo haría en infinitos puntos.
Si se restringe su dominio y se define:

$$f: [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \longrightarrow y = \cos x$$

entonces $f(x) = \cos x$ es biyectiva, figura 6.7. Al ser biyectiva admite una función inversa, que en este caso es llamada **función arco coseno o coseno inverso**

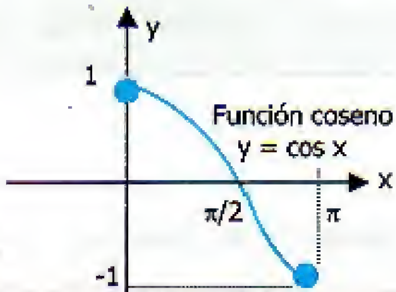


Figura 6.7

La figura 6.8 es la representación gráfica de la función **arco coseno o coseno inverso.**
El dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y el rango es $[0, \pi]$

Definición
La **función coseno inverso o arco coseno,** denotada por $\cos^{-1}$ se define como sigue:

$y = \cos^{-1}$ si y sólo si $x = \cos y$ con Dom = $[-1, 1]$ y Rgo = $[0, \pi]$

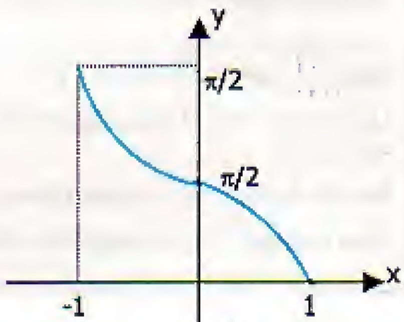


Figura 6.8
Función arco coseno

La función arco tangente o tangente inverso

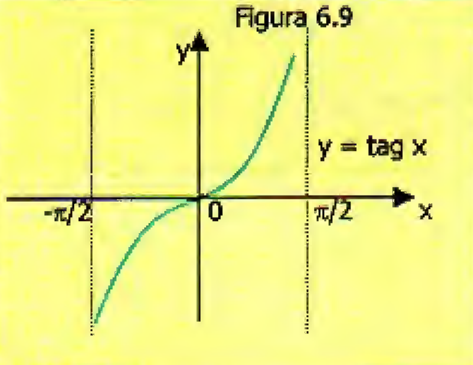
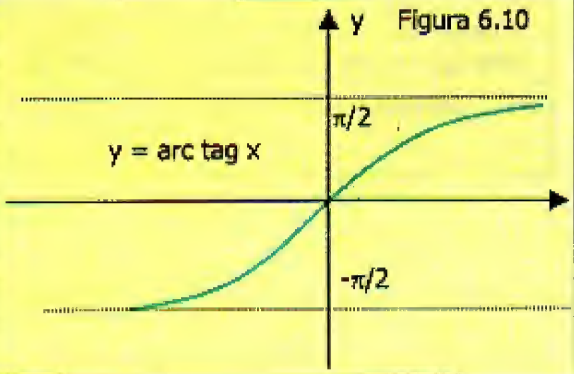
Figura 6.9


Figura 6.10


La figura 6.9 representa la función tangente que hemos estudiado antes, la cual sabemos que no es inyectiva.

Si restringimos la función tangente a una parte de su dominio, de tal manera que sea biyectiva, entonces ella admitirá una función inversa denominada función **arco tangente** o función **tangente inverso.** Figura 6.10

El dominio de esta función inversa estaría constituido por todos los números reales y el rango estaría constituido por el intervalo abierto ($\pi/2$, $\pi/2$).

Podemos definir la función arco tangente así:

La función arco tangente o tangente inverso, denotada por tag^{-1}, se define como sigue:
$y = tag^{-1} x$ si y sólo si $x = tag\, x$ con Dom = R y Rango = $(-\pi/2, \pi/2)$

Uso de la calculadora

Las teclas de la calculadora presentadas como **sen^{-1}**, **cos^{-1}**, y **tag^{-1}** corresponden a las tres funciones que hemos analizado. Ellas tienen como objetivo, averiguar qué ángulos corresponden a una determinada razón trigonométrica.

Para activar estas teclas, antes debe ser pulsada una de las teclas que nos permite el paso a la segunda opción (INV, SHIFT, 2ndf) según sea la calculadora.

Los valores que la calculadora ofrece para la función arco seno están comprendidos entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

Para la función arco coseno ofrece valores comprendidos entre 0 y π.

Para la función arco tangente ofrece valores comprendidos entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

Para averiguar qué otros ángulos tienen una misma razón trigonométrica es necesario recordar las propiedades que hemos estudiado.

Veamos:

arc sen (-0,75) = -0,848 rad.

Si desea averiguar qué ángulos positivos y menores que 2π tienen por seno – 0,75, debe tenerse en cuenta: sen (-x) = sen (2π - x) y sen x = sen (π - x).

Esto nos indica que los ángulos entre 0 y 2π cuyo seno es – 0,75 son 3,990 rad y 5,435 rad.

Ejercicios resueltos de aplicación con funciones inversas

Ejercicio 1 Evaluar en grados y en radianes $\text{sen}^{-1} 0{,}75$.

a) Primero usamos la modalidad en grados y aplicamos sucesivamente **0,75 inv sen** quedándonos así:

$$\text{sen}^{-1} 0{,}75 = 48° \, 35' \, 25''$$

b) Usemos luego la modalidad en radianes y aplicamos sucesivamente **0,75 inv sen** quedándonos así:

$$\text{sen}^{-1} 0{,}75 = 0{,}848062$$

Ejercicio 2 Evaluar en radianes arc sen (-0.32). Recordemos que arc sen(-0,32) = $\text{sen}^{-1}(-0{,}32)$

Con la calculadora en la modalidad radianes aplicamos sucesivamente **0,32 ± inv sen**

$$\text{arc sen}\,(-0{,}32) = -0{,}3257295$$

Ejercicio 3 Evaluar en grados y en radianes $\cos^{-1}(-0{,}12)$

a) Con la calculadora en la modalidad de grados (DEG) aplicamos sucesivamente **0,12 ± inv cos inv ° ' "**

$$\cos^{-1}(-0{,}12) = 96° \, 53' \, 32''$$

b) Con la calculadora en la modalidad de radianes (rad) aplicamos sucesivamente **0,12 ± inv cos**

$$\cos^{-1}(-0{,}12) = 1{,}6910862$$

Ejercicio 4 Evaluar en radianes $\text{sen}^{-1}(\text{sen } 4{,}3)$

$\text{sen}^{-1}(-0{,}9161659)$ Aplicando sen 4,3

$= -1{,}1584073$ Aplicando **inv sen**

Ejercicio 5 Evaluar en radianes $\cos^{-1}(\cos 3)$

$\cos^{-1}(-0{,}9899925)$ Aplicando cos 3

$= 3$ Aplicando **inv cos**

Ejercicio 6 Evaluar con la calculadora las expresiones:

a) $\text{sen}(\text{sen}^{-1} 0{,}5)$ b) $\text{sen}(\text{sen}^{-1} 0{,}8)$ c) $\cos(\cos^{-1} 0{,}2)$ d) $\cos(\cos^{-1} 0{,}7)$

Solución

a) $\text{sen}(\text{sen}^{-1} 0{,}5) = \text{sen}(30) = 0{,}5$ b) $\text{sen}(\text{sen}^{-1} 0{,}8) = \text{sen}(53{,}1301024) = 0{,}8$

c) $\cos(78{,}4630410) = 0{,}2$ d) $\cos(\cos^{-1} 0{,}7) = \cos(45{,}5729960) = 0{,}7$

Como consecuencia directa de a) y b) se escribe que $\mathbf{sen(sen^{-1} x) = x}$

Como consecuencia directa de c) y d) se escribe que $\mathbf{cos(cos^{-1} x) = x}$

Ejercicio 7 Evaluar en la modalidad de radianes $y = \cot^{-1} 0{,}6513$

La mayor parte de las calculadoras no poseen las teclas $\cot^{-1}$, pero es posible obtener los valores de la cotangente inversa utilizando la identidad tag y = 1/cot y.

$$\text{Si } y = \cot^{-1} 0.6513 \longrightarrow \cot y = 0{,}6513 \longrightarrow \text{tag } y = \frac{1}{\cot y} = \frac{1}{0{,}6513}$$

$$\text{tag } y = \frac{1}{0{,}6513} \longrightarrow y = \text{tag}^{-1}\left(\frac{1}{0{,}6513}\right) \text{ con } 0 < y < \pi$$

Si oprimimos en la calculadora las teclas **0,6513 inv 1/x inv tag** obtenemos que:

$$y = 0{,}9935078$$

Ejercicio 8 Evaluar cos (tag^{-1} 4/3).

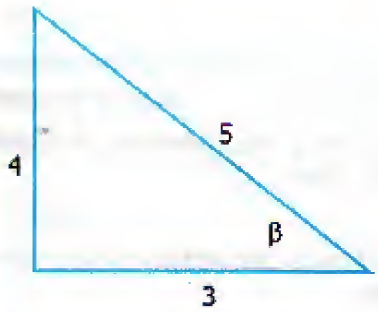
Llamemos $\text{tag}^{-1}\ 4/3 = \beta$

Si $\text{tag}^{-1}\ 4/3 = \beta$ entonces $\text{tag}\ \beta = 4/3$

Dibujemos ahora un triángulo como el de la derecha donde se cumpla que $\text{tag}\ \beta = 4/3$. Si se calcula la hipotenusa por Pitágoras encontraremos que es igual a 5.

Al calcular $\cos \beta = 3/5$

Luego $\cos(\text{tag}^{-1}\ 4/3) = 3/5$



Ejercicio 9 Evaluar sen (arc tag x/2)

Llamemos arc tag $x/2 = \alpha$

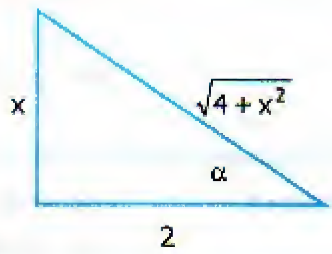
Arc tag $x/2 = \alpha$ significa que tag $\alpha = x/2$

En estos casos se dibuja un triángulo como el mostrado en la figura de la derecha, de tal forma que se cumpla que tag $\alpha = x/2$.

Al calcular la hipotenusa se tendrá que ella es $\sqrt{4+x^2}$

Al determinar la razón del seno nos queda que:

$$\text{sen (arc tag } x/2) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$$



Ejercicio 10 Hallar arc sen (sen $3\pi/4$)

Obtenemos primero sen $3\pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

A continuación obtenemos arc sen $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi/4$

Luego arc sen (sen $3\pi/4$) $= \pi/4$

Ejercicio 11 Evaluar sen $\left(\text{sen}^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}\frac{4}{5}\right)$

Hagamos $\text{sen}^{-1} 1/2 = U$ y $\cos^{-1} 4/5 = V$.

Sustituyendo U y V en la expresión original nos queda la expresión sen(U + V) que al desarrollarla por la fórmula de suma de senos se tendrá:

$\text{sen}(U + V) = \text{sen}\,U \,.\, \cos V + \cos U \,.\, \text{sen}\,V$

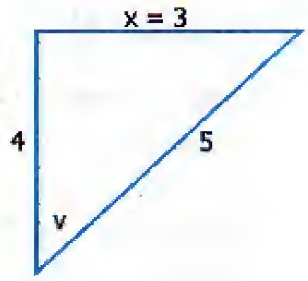
Sustituyendo U y V por sus valores se tiene que:

$\text{sen}(U + V) = \text{sen} \,.\, \text{sen}^{-1}\ 1/2 \,.\, \cos \cos^{-1} 4/5 + \cos .\ \text{sen}^{-1}\ 1/2 \,.\, \text{sen} \cos^{-1} 4/5$

$\text{sen}(U + V) = \ \frac{1}{2}.\frac{4}{5} + \cos.\text{sen}^{-1} 1/2 \,.\text{sen} \cos^{-1}\ 4/5$

Sabemos que si $\text{sen}^{-1}1/2 = y$ entonces sen y =1/2 de donde se deduce que y = 30°

Luego $\cos(\text{sen}^{-1} 1/2) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Para hallar $\text{sen} \cos^{-1} 4/5$ haremos uso del triángulo rectángulo con cos v = 4/5

Si $\cos^{-1} 4/5 = v$ entonces cos v = 4/5

Al aplicar Pitágoras se tendrá que el otro cateto viene dado por

$x = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

Si x = 3 entonces sen v = 3/5 y por lo tanto $\boxed{\text{sen} \cos^{-1} 4/5 = 3/5}$

Finalmente se tendrá que:

$$\text{sen}\,(U + V) = \frac{1}{2}.\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{3}{5} = \frac{4}{10} + \frac{3\sqrt{3}}{10} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}$$

$$\boxed{\text{Sen}\,(\text{sen}^{-1}\ 1/2 + \cos^{-1} 4/5) = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}}$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Usando la calculadora electrónica en la modalidad de RAD (radianes) obtener el valor exacto en radianes:

a) $sen^{-1}(-1/2)$ b) $sen(sen^{-1} 0{,}82)$ c) $cos^{-1}(-0{,}27)$ d) $sen^{-1}[sen(-3)]$ e) $cos(sen^{-1} 0{,}42)$

f) $sen^{-1}[sen(-54)]$ g) $cos^{-1}(cos\ 2{,}73)$ h) $sen^{-1}(cos\ 1{,}38)$ i) $sen^{-1}(sen\ 28)$ j) $cos^{-1}(sen\ 0{,}76)$

2. Hallar los valores siguientes sin hacer uso de la caluladora

a) $arc\ sen\ (sen\ 3\pi/2)$ b) $sen^{-1}(sen\ \pi/6)$ c) $arc\ tag\ (tag\ 3\pi/4)$ d) $cos^{-1}(cos\ 5\pi/4)$

e) $arc\ cos\ (cos\ 5\pi/6)$ f) $sen\ (arc\ tag\ 1)$ g) $cos^{-1}(sen\ \pi/6)$ h) $sen^{-1}(tag\ \pi/4)$

i) $sen^{-1}[sen\ (-3\pi/4)]$ k) $sen^{-1}(sen\ \pi/5)$ ℓ) $sen^{-1}[sen(-\pi/6)]$ m) $cos^{-1}(cos\ \pi/3)$

n) $cos[arc\ sen(-1/2)]$ 0) $sen[arc\ cos(-1/2)]$ p) $tag(sen^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ q) $sen^{-1}(sen\ \pi/6)$

r) $cos(tag^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3})$

3. Dado $\alpha = sen^{-1} 1/3$ encontrar el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes:

a) $cos\ \alpha$ b) $tag\ \alpha$ c) $sec\ \alpha$

4. Dado $\beta = arc\ cos\ 2/3$, encontrar el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes:

a) $tag\ \beta$ b) $cosec\ \beta$ c) $cot\ \beta$

5. Evaluar y simplificar:

a) $sen(tag^{-1} x/2)$ b) $cos(sen^{-1} 2/3)$ c) $tag(sen^{-1} 2/5)$ d) $sen[arc\ sen\ 2/3 + arc\ cos\ 1/3]$

e) $cos[sen^{-1} 1/3 - tag^{-1} 1/2]$ f) $tag[tag^{-1} 3/4 - sen^{-1} 1/2]$ g) $cos[sen^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} + cos^{-1} 3/5]$

h) $sen[sen^{-1} 1/2 + cos^{-1} 3/5]$ i) $cos[sen^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} - cos^{-1} 1/2]$ j) $cos[sen^{-1} 5/13 + tag^{-1} 24/7]$

6. Demuestra las siguientes identidades haciendo uso del triángulo rectángulo.

a) $cos\ (cos^{-1} 4/5) + tag(sen^{-1} 2/3) = \frac{4+2\sqrt{5}}{5}$ b) $sen[arc\ sen\ 1/2] - cos[arc\ sen\ 4/5] = -1/10$

c) $sen(arc\ sen\ 5/7) + tag(arc\ tag\ 2) = 19/7$

d) $tag(arc\ cos\ 5/6) - cos\ (arc\ sen\ 4/7) = \frac{7\sqrt{11} - 5\sqrt{3}}{35}$

e) $cos(sen^{-1} 2/3) + cos(sen^{-1} 3/5) = \frac{3\sqrt{22} + 5\sqrt{5}}{15}$

Resolver una ecuación trigonométrica consiste en determinar el valor o los valores de las incógnitas capaces de satisfacer la igualdad.

Veamos algunos ejemplos de resolución de ecuaciones trigonométricas

Ejemplo 1 Resolver la ecuación $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

La resolución de esta ecuación es inmediata. Veamos.

Si $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow x = \pi/4$ y $x = 7\pi/4$. Esto es equivalente a decir en grados $x = 45^\circ$ y $x = 315^\circ$

Nótese que el coseno es positivo en el primero y el cuarto cuadrante. Para obtener el ángulo en el cuarto cuadrante hacemos $x = 360^\circ - 45^\circ = 315$.

Ejemplo 2 Resolver la ecuación $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Los ángulos del primer giro cuyo coseno es igual a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ son 135° y 225°. Esto porque cos 3x es negativo y el coseno es negativo en el segundo y tercer cuadrante, por lo que:

$$x = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$$

$$x = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$$

Por otro lado, los ángulos obtenidos al sumar a los anteriores un número entero de vueltas tendrán el mismo coseno.

Luego debe cumplirse que: $\begin{cases} 3x = 135^\circ + 360^\circ k;\ k \in Z \\ 3x = 225^\circ + + 360^\circ;\ k \in z \end{cases}$

Despejando x se tendrá que: $\begin{cases} x = \frac{135^\circ}{3} + \frac{360^\circ k}{3} \longrightarrow x = 45^\circ + 120^\circ k;\ k \in Z \\ x = \frac{225^\circ}{3} + \frac{360^\circ k}{3} \longrightarrow x = 75^\circ + 120^\circ k;\ k \in Z \end{cases}$

Al expresarlo en radianes nos queda que: $\begin{cases} x = \frac{\Pi}{4} + \frac{2\Pi}{3} k;\ k \in Z \\ x = \frac{5\Pi}{12} + \frac{2\Pi}{3} k;\ k \in Z \end{cases}$

Ejemplo 3 Resolver la ecuación $\cos x = \cot x$

$$\cos x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \quad \text{(escribiendo en el segundo miembro } \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\text{)}$$

$$\cos x .\ \operatorname{sen} x = \cos x \quad \text{(escribiéndola en forma lineal)}$$

$$\cos x .\ \operatorname{sen} x - \cos x = 0 \quad \text{(igualando a cero)}$$

$$\cos x\,(\operatorname{sen} x - 1) = 0 \quad \text{(sacando factor común } \cos x\text{)}$$

$$\text{Si } \cos x\,(\operatorname{sen} x - 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \longrightarrow x = \pi/2 \text{ y } x = 3\pi/2 \\ \text{o} \\ \operatorname{sen} x - 1 = 0 \longrightarrow \operatorname{sen} x = 1 \longrightarrow x = \pi/2 \end{cases}$$

Luego se tendrá en radianes $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$ o en grados $x = 90^\circ$ y $x = 270^\circ$

Ejemplo 4 Resolver la ecuación $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$

Expresamos el seno en función del coseno usando la relación $\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$
Sustituyendo en la ecuación original se tendrá que:

$$\pm\sqrt{1 - \cos^2 x} + \cos x = 1$$

$$\pm\sqrt{1 - \cos^2 x} = 1 - \cos x \quad \text{(pasando } \cos x \text{ al segundo miembro)}$$

$$1 - \cos^2 x = (1 - \cos x)^2 \quad \text{(elevando al cuadrado a ambos miembros)}$$

$$1 - \cos^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x \quad \text{(producto notable en el segundo miembro)}$$

$$1 - \cos^2 x - 1 + 2\cos x - \cos^2 x = 0 \quad \text{(igualando a cero)}$$

$$-2\cos^2 x + 2\cos x = 0 \quad \text{(efectuando términos semejantes)}$$

$$\cos^2 x - \cos x = 0 \quad \text{(dividiendo ambos miembros por } -2\text{)}$$

$$\cos x(\cos x - 1) = 0 \quad \text{(sacando } \cos x \text{ factor común)}$$

$$\text{Si } \cos x(\cos x - 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \longrightarrow x = \pi/2 \text{ y } x = 3\pi/2 \\ \cos x - 1 = 0 \longrightarrow \cos x = 1 \longrightarrow x = 0 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son $x = \pi/2$ y $x = 0$

La solución $x = 3\pi/2$ es ficticia y no verifica la ecuación original. Compruébalo.

Ejemplo 5 Resolver la ecuación $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = 0$

Hagamos uso de una expresión que transforma una suma de senos en productos

Recordemos que $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ ....(I)

Aplicando la expresión (I) en la ecuación original se tendrá que:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = 2 \operatorname{sen} \frac{x+3x}{2} . \cos \frac{x-3x}{2}$$

$$= 2 \operatorname{sen} \frac{4x}{2} . \cos(-\frac{2x}{2}) = 2 \operatorname{sen} 2x . \cos(-x)$$

$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = 2 \operatorname{sen} 2x . \cos x$ [porque $\cos(-x) = \cos x$]

Con esta transformación, la ecuación original es equivalente a:

$2 \operatorname{sen} 2x . \cos x = 0$

$\operatorname{sen} 2x . \cos x = 0$ (dividiendo ambos miembros por 2)

Si $\operatorname{sen} 2x . \cos x = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 0° + 360° k \;;\; k \in Z \rightarrow x = 0° + 360° k \\ 2x = 180° + 360° k;\; k \in Z \rightarrow x = 90° + 180 \end{cases} \\ \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 90° + 360° k;\; k \in Z \\ x = 270° + 360° k;\; k \in Z \end{cases} \end{cases}$$

Expresando estos resultados en radianes se tendrá $\begin{cases} x = 0 + \pi k;\; k \in Z \\ x = \pi/2 + \pi k;\; k \in Z \end{cases}$

Ejemplo 6 Resolver la ecuación $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$, donde:

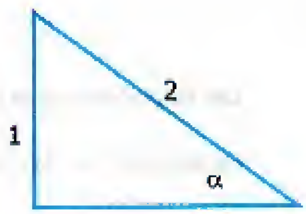
a) x está en el intervalo $[o, 2\pi]$ b) x no tiene restricciones

a) $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} x = 1/2$

Nuestro propósito es encontrar los valores de x donde se cumpla que $\operatorname{sen} x = 1/2$.

Dibujemos un triángulo de referencia con un ángulo de referencia α

Como $\operatorname{sen} \alpha = 1/2$ entonces el cateto opuesto al ángulo α es 1 y el valor de la hipotenusa es 2.



Este es un triángulo rectángulo, con ángulos de 30° y 60° con $\alpha = \pi/6$

Al ser positivo el valor del seno, el ángulo α puede estar en el primero. o en el segundo cuadrante.

Si $\alpha = \pi/6$ está en el primer cuadrante, entonces $x = \pi/6$

Si $\alpha = \pi/6$ está en el segundo cuadrante, entonces $x = 5\pi/6$

Nuestra respuesta será: $\boxed{x = \pi/6 \quad y \quad x = 5\pi/6}$

b) Las soluciones anteriores, restringidas al intervalo $[0, 2\pi]$, son llamadas **soluciones básicas, o soluciones fundamentales** de la ecuación.

Sabemos, que es posible sumarle múltiplos de 2π a esas soluciones básicas, con lo que el sen x tendrá el mismo valor. Estas soluciones en estas condiciones son llamadas **soluciones generales** de la ecuación dada.

Son soluciones generales las siguientes:

$$x = \pi/6 + 2k\pi \quad ó \quad x = 5\pi/6 + 2k\pi$$

Así, por ejemplo,

Si $k = 3 \longrightarrow x = \pi/6 + 2.3.\pi = \pi/6 + 6\pi = 37\pi/6$

Si $k = -2 \longrightarrow x = \pi/6 + 2.(-2).\pi = \pi/6 - 4\pi = 19\pi/6$

Ejemplo 7 Resolver la ecuación $6\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

Nótese, que es una ecuación de segundo grado, donde la incógnita está representada por cos x (variable) y los coeficientes de la ecuación son: $a = 6$; $b = 1$ y $c = -2$.

Sustituyendo en la fórmula de la ecuación de segundo grado se tendrá que:

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(6).(-2)}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12}$$

A partir de aquí tenemos dos opciones: $\cos x = \frac{-1+7}{12} = \frac{1}{2}$ y $\cos x = \frac{-1-7}{12} = -\frac{2}{3}$

Analicemos $\cos x = \frac{1}{2}$

Si $\cos x = 1/2 \longrightarrow x = 60° = \pi/3$.
Por ser cos x positivo, se tendrá que el ángulo corresponde al I ó IV cuadrante.
Para el I cuadrante $x = 60°$
Para el IV cuadrante se tendrá que:
$x = 360° - 60° = 300° = 10\pi/6$

Analicemos $\cos x = -\frac{2}{3}$

$\cos x = -2/3 \longrightarrow x = 48° 11'$
Por ser cos x negativo se tendrá que el ángulo corresponde al III y IV cuadrante.
$x = 180° - 48° 1' = 131° 49'$
$x = 180° + 48° 11' = 228° 11'$

El conjunto solución viene dado así: [60°, 131° 49', 228° 11', 300°]

Ejemplo 8 Resolver la ecuación $8\cos^2 x - 2\cos x = 1$

Esta es también una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c$, donde la incógnita es cos x, razón por la cual debe resolverse
como una ecuación de segundo grado con variable cos x.

Igualando la ecuación a cero nos queda que $8\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$

Aquí se tiene que $a = 8$; $b = -2$ y $c = -1$.

Sustituyendo en la fórmula de la ecuación de segundo grado se tendrá que:

$$\cos x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{16} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{16} = \frac{2 \pm 6}{16}$$

Si $\cos x = \frac{2 \pm 6}{16}$ →

- $\cos x = \frac{8}{16}$ → $\cos x = \frac{1}{2}$ → $\begin{cases} x = 60^\circ + 2k\pi,\ k \in Z \\ x = 300^\circ \text{ +con } k \in Z \end{cases}$
- $\cos x = -\frac{4}{16}$ → $\cos x = -\frac{1}{4}$ → $\begin{cases} x = 104^\circ\, 30' + 2k\pi;\ k \in Z \\ x = 225^\circ\, 30' + 2k\pi;\ k \in Z \end{cases}$

Ejemplo 9 Resolver la ecuación $\cos 2x + \cos x = 0$

Expresemos cos 2x en función de x usando la relación $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ ....(A)
Sustituyendo la expresión (A) en la ecuación original se tendrá que:

$\cos^2 x - \text{sen}^2 x + \cos x = 0$

$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x = 0$ (porque $\text{sen}^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$)

$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x = 0$ (eliminando paréntesis)

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ (sumando términos semejantes)

Resolviendo la ecuación de segundo grado cuya variable es cos x, con $a = 2$; $b = 1$ y $c = -1$ tendremos que:

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

Si $\cos x = \dfrac{-1 \pm 3}{4} \rightarrow \begin{cases} \cos x = -\dfrac{4}{4} \rightarrow \cos x = -1 \rightarrow x = 180^\circ + 2k\pi \text{ ó } x = \pi + 2k\pi;\ k \in Z \\ \cos x = \dfrac{2}{4} \rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + 2k\pi \text{ ó } x = \pi/3 + 2k\pi \\ x = 300^\circ + 2k\pi \text{ ó } x = 5\pi/3 + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$

Ejemplo 10 Hallar ángulos del primer giro que satisfacen la ecuación $\operatorname{sen} x + \sqrt{2}\cos x = 1$

Expresemos cos x en función de sen x usando la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \longrightarrow \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \longrightarrow \boxed{\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2}}$

Sustituyendo ésta expresión en la ecuación inicial se tiene que:

$\operatorname{sen} x + \sqrt{2}\ \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2} = 1$

$\operatorname{sen} x + \sqrt{2 - 2\operatorname{sen}^2 x} = 1$ (efectuando el producto de $\sqrt{2}\ .\ \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2}$)

$\sqrt{2 - 2\operatorname{sen}^2 x} = 1 - \operatorname{sen} x$ (pasando sen x al segundo miembro)

$2 - 2\operatorname{sen}^2 x = (1 - \operatorname{sen} x)^2$ (elevando al cuadrado a ambos miembros)

$2 - 2\operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$ (el producto notable del segundo miembro)

$2 - 2\operatorname{sen}^2 x - 1 + 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x = 0$ (igualando a cero)

$-3\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x + 1 = 0$ (reduciendo términos semejantes)

$3\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x - 1 = 0$ (multiplicando ambos miembros por –1)

Si hacemos sen x = t nos queda la ecuación escrita de la manera siguiente:

$$3t^2 - 2t - 1 = 0$$

Resolvamos la ecuación de segundo grado en términos de t, quedándonos que:

$t = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \dfrac{2 \pm 4}{6} \rightarrow \begin{cases} t = 1 \rightarrow \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x = \pi/2 \text{ ó } x = 90^\circ \\ t = -1/3 \rightarrow \operatorname{sen} x = -1/3 \rightarrow x = 199^\circ 28' \text{ y } x = 340^\circ 31' \end{cases}$

Se puede comprobar que la ecuación original se verifica para $x = 90^\circ = \pi/2$ y para $x = 340^\circ 31'$. Esto nos indica que estas son las soluciones de la ecuación.

Ejemplo 11 Resolver la ecuación $\cos x + \cos 5x - \cos 3x = 0$

Seleccionemos los dos primeros términos de la ecuación $\underbrace{\cos x + \cos 5x}_{A} - \cos 3x = 0$

Escribimos la expresión señalada con A como una suma de cosenos, utilizando una identidad vista antes.

Veamos:

$$A = \cos x + \cos 5x = 2.\cos\frac{x+5x}{2}.\cos\frac{x-5x}{2} = 2\cos\frac{6x}{2}.\cos\left(-\frac{4x}{2}\right) = 2\cos 3x \cos(-2x)$$

$A = \cos x + \cos 5x = 2\cos 3x \,.\, \cos 2x$ [Recordemos que $\cos(-2x) = \cos 2x$]

$A = 2\cos 3x \,.\, \cos 2x$

Sustituyendo A por su expresión en la ecuación original nos quedará que:

$2\cos 3x \,.\, \cos 2x - \cos 3x = 0$

Tomando factor común 3 x nos queda que: $\cos 3x\,(2\cos 2x - 1) = 0$

$$\text{Si } \cos 3x\,(2\cos 2x - 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0 \text{ ....(I)} \\ \text{ó} \\ 2\cos 2x - 1 = 0 \longrightarrow 2\cos 2x = 1 \text{ ....(II)} \end{cases}$$

De (I), si $\cos 3x = 0 \longrightarrow 3x = 90° + k\pi \longrightarrow \boxed{x = 30° + k\pi/3}$

$$\text{De (II) si } 2\cos 2x = 1 \longrightarrow \cos 2x = 1/2 \longrightarrow \begin{cases} 2x = 60° + 2k\pi \longrightarrow \boxed{x = 30° + 2k\pi} \\ 2x = 300° + 2k\pi \longrightarrow \boxed{x = 150° + 2k\pi} \end{cases}$$

Si las soluciones son solicitadas en el intervalo $[0, 2\pi]$, se tendrá que:

$\boxed{x = \pi/6;\ \pi/2;\ 7\pi/6;\ 3\pi/2;\ 11\pi/6}$ ó $\boxed{x = 30°;\ 90°;\ 150°;\ 210°;\ 270°;\ 330°}$

Sugerencias para la resolución de ecuaciones trigonométricas

Como hemos podido observar, no existe un método general para resolver una ecuación trigonométrica. Sin embargo, es posible sugerir un grupo de procedimientos que podrían ser de gran utilidad:

- Si existen razones trigonométricas de distintos ángulos, x, 2x, 3x, las debemos expresar todas en función de un mismo ángulo simple. Ver ejercicios resueltos 5, 9, 11.
- Cuando existan varias razones trigonométricas distintas, sen x, cos x, tag x..., deben ser expresadas todas en función de una de ellas. Ver ejemplos resueltos 3, 4, 10 .
- De ser necesario, aplíquese un cambio de variable. Ver segunda parte de ejemplo resuelto 10.
- Debe resolverse la ecuación obtenida considerando como incógnita la razón trigonométrica seleccionada en el segundo aspecto .
- Debe encontrarse el ángulo x partiendo de su razón trigonométrica, tomando en consideración que, si el ángulo x es una solución, también lo serán los ángulos $x + 360^{\circ}k$, con k un número entero.
- Al resolver cualquier tipo de ecuación, es aconsejable verificar que las soluciones obtenidas son correctas.

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $2\cos x = 1$

2. $\cot^2 x - 1 = 0$ en el intervalo $[0, \pi]$

3. $\operatorname{sen} x = \cos 2x$

4. $\sec^2 x - 1 = \operatorname{tag} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

5. $3\operatorname{sen} x - 2\cos^2 x = 0$

6. $2\cos 2x = 1$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

7. $\cos 2x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$

8. $10\operatorname{sen}^2 x - 12\operatorname{sen} x - 7 = 0$

9. $10\cos^2 x - 10\cos x - 7 = 0$

10. $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Sugerencia: elevar ambos miembros al cuadrado

11. $\cos 4x + \cos 2x = \cos x$

12. $2\cos^2 x \operatorname{tag} x - \operatorname{tag} x = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

13. $\operatorname{tag}^2 x + \sec x - 1 = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.
Sugerencia: utilizar la expresión $1 + \operatorname{tag}^2 x = \sec^2 x$

14. $\cos^2 x + \operatorname{sen} x \cos x - 1 = 0$

15. $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{tag} x$. Sugerencia: sustituir por la expresión $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$.

16. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x = 0$. Sugerencia: escribir $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$ como producto

17. $\operatorname{tag} x + \cos 2x = 1$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

18. $\operatorname{sen}^2 2x + 2\cos^2 x - 2 = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

19. $\operatorname{sen}^2 2x - \cos^2 x = 1/2$

20. $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

21. $\operatorname{tag}^2 x + 3\sec x + 3 = 0$ en $[0^{\circ}, 360^{\circ}]$

22. $\operatorname{tag} x - \cot x = 0$ en $[0^{\circ}, 360^{\circ}]$

23. $\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen} x \cos x = 0$

24. $\sec^2 x + 3\operatorname{tag} x - 11 = 0$

25. $\sqrt{3}\cos x - \operatorname{sen} x = 1$

26. $\cos 2x = 1 + \operatorname{sen} x$

Respuestas

1. $x = 60° + 360° k$ **2.** $x = \pi/4$, $x = 3\pi/4$

3. $x = 30° + 2k\pi$ $x = 150° + 2k\pi$ $x = 270° + 2k\pi$

4. $0; \pi/4; \pi; 5\pi/4$ **5.** $x = 30° + 2k\pi$ $x = 150° + 2k\pi$ **6.** $\pi/6$; $5\pi/6$; $7\pi/6$; $11\pi/6$

7. $x = 0° + 2k\pi$; $x = 30° + 2k\pi$; $x = 180° + 2k\pi$; $x = 150° + 2k\pi$

8. $205° 30'$ y $334° 30'$

9. $241° 40'$ y $118° 20'$ **10.** 0 y $\pi/2$ **11.** $x = 90° \pm 360k$; $x = 20° \pm 120k$

12. $0; \pi; \pi/4; 3\pi/4; 5\pi/4; 7\pi/4$ **13.** $0; 2\pi/3; 4\pi/3$

14. $x = 180°k$; $x = 45° + 180°k$

15. $x = 180°k$; $x = 45° + 360°k$; $x = 225° + 360°k$; $x = 135° + 360°k$ $x = 315° + 360°k$

16. $x = 90° k$; $x = 120° + 360°k$; $x = 240° + 360°k$

17. $x = 0°$; $x = 180°$; $x = 45°$; $x = 225°$

18. $x = 0°$; $x = 45°$; $x = 135°$; $x = 180°$; $x = 225°$; $x = 315°$

19. $x = 60°$; $120°$; $240°$; $300°$; $45°$; $135°$; $225°$; $315°$

20. $x = \pi/2$ ó $x = 3\pi/2$ **21.** $x = 120°$; $x = 180°$; $x = 240°$

22. $x = 45°$; $x = 135°$; $x = 225°$; $x = 315°$ **23.** $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$

24. $63° 30'$, $243° 30'$, $101° 20'$, $281° 20'$ **25.** $\pi/4$ y $7\pi/4$

26. $x = 0° + 180° k$ $x = 210° + 360°k$ $x = 330° + 360° k$

Actividades complementarias

1. Determinar el valor de cada una de las siguientes expresiones:

a) $\cos[\text{sen}^{-1}(-5/13) + \text{tag}^{-1} 4/3]$

R: $\dfrac{4(5 \pm 9)}{65}$

b) $\text{sen}[\text{sen}^{-1} 12/13 + \cos^{-1} 4/3]$

R: 63/65

c) $\cos[\cos^{-1} 8/15 - \text{tag}^{-1} 20/21]$

R: $\dfrac{168 + 20\sqrt{161}}{435}$

c) $\text{tag}[2\cos^{-1} 40/41 - \cos^{-1} 9/41]$

R: $\dfrac{4(9\sqrt{10} - 31)}{245}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0, 2\pi]$

a) $\text{sen}^2 x + 2 = 3\,\text{sen}\,x$. Sugerencia: hacer sen x = U **R:** $x = \pi/2$

b) $\cos^2 x + 2 = 3\cos x$ **R:** $x = 0$

c) $2\cos^2 x - \text{sen}\,x - 1 = 0$ **R:** $x = \pi/6,\ 5\pi/6,\ 3\pi/2$

d) $\text{sen}^2 x + 4 = 5$ **R:** $\pi/2,\ 3\pi/2$

3. Despejar t hasta centésimos en la ecuación $\text{sen}^2 t - 4\,\text{sen}\,t + 1 = 0$ **R:** 15,54°

4. Resolver las ecuaciones siguientes en el intervalo [0°, 360°]

a) cos a = cot a **R:** a = 90° ó a = 270°

b) $3\,\text{sen}^2 x + 2\cos x = 2$ **R:** x = 0° y x = 360° ó x = 109,47° y x = 250,53°

5. Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} \text{sen}(x + y) = 1 \\ \text{sen}(x - y) = 1/2 \end{cases}$$

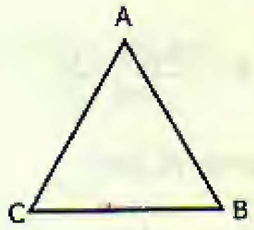
R: x = 60° y = 30°

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

¿Sabes cuál es el teorema del borrico?.

Cuenta la historia que en una de sus famosas proposiciones, el geómetra Euclides estableció que la suma de dos lados de un triángulo es siempre mayor que el tercero.

Los sabios de la antigua Grecia argumentaban que ese no era un gran descubrimiento puesto que era evidente hasta para un burro.



Decían: "Poned a un burro en el punto A y colocad pasto en el punto B. El animal sabrá por instinto y con toda seguridad que ir de A a B es mucho más corto que ir de A a C y luego recorrer el camino de C a B"

¿Sabes lo que dijo Ibn Jaldún, historiador árabe que nació en 1332 y murió en 1406?

" La geometría ilumina el intelecto y disciplina la mente. Todos los argumentos son claros y ordenados en grado sumo. De ese modo, la persona que estudia geometría adquiere inteligencia"

La geometría es la ciencia del espacio, siendo una de las bases sobre la que se apoyan la mayoría de las ciencia naturales, ya que confiere un dominio completo de las relaciones espaciales.

Históricamente, la geometría es considerada la primera **ciencia racional** estructurada por el hombre, en la que todos sus resultados pueden ser deducidos de unos pocos principios.

En las ciencias como la física e ingeniería los fenómenos son descritos en términos de cambio de posición de los cuerpos en el espacio.

¿Qué era el triple negocio del tráfico triangular?

Los británicos y los holandeses se dedicaron al tráfico *triangular* de buques, realizándose en tres puertos: uno europeo, otro africano y otro americano.

En su inicio, los barcos salían de Europa con cargamento de armas, ron y productos de baja calidad. Una vez en África los cambiaban por esclavos negros. Desde aquí los esclavos eran transportados, amontonados como animales, a América y finalmente los barcos regresaban a Europa cargados de productos tales como azúcar, café y algodón.

Este tráfico les reportaba un *triple* beneficio: por una parte exportaban sus productos manufacturados, a la vez que proporcionaban mano de obra barata a sus colonias e importaban materias primas.

Tales de Mileto (hacia 624-548 a.C) fue el primer gran matemático griego, especialmente geómetra, siendo al mismo tiempo un gran astrónomo y filósofo. Era considerado un hombre de extraordinaria inteligencia y venerado como uno de los siete sabios griegos.
Perteneció a la escuela jónica, la cual se caracterizaba por preguntarse el por qué de las cosas. Por ejemplo, el hecho de que todos los triángulos inscritos sobre el diámetro de una circunferencia son rectángulos ya era conocido por los babilonios, pero fue Tales quien demostró éste y otros teoremas.

VECTORES EN EL PLANO

7.1 Introducción

Se denomina **plano** a una extensión como la tabla de una mesa, un subsuelo que no posea ondulaciones, o la superficie de un líquido en reposo en un lago tranquilo. Se supondrá que el plano puede ser prolongado en todas direcciones como se desee.

A los diferentes lugares de un plano se les denomina **puntos**. Entre esos puntos existe la posibilidad de trazar **líneas**, siendo de especial interés las llamadas **líneas rectas**.

Dos o más rectas en el plano que se cortan en un punto son llamadas **rectas secantes**. Este es el caso de las rectas a, b y a, c de la figura 7.1, o bien no cortarse nunca, como las rectas c y b. En este último caso se dice que son **rectas paralelas**.

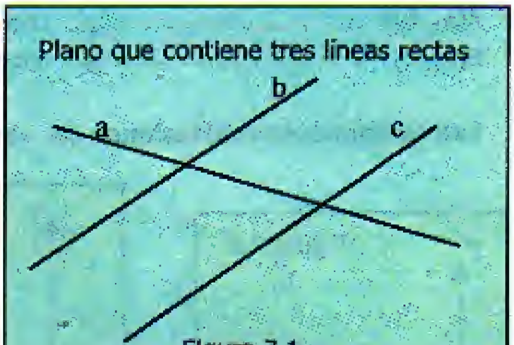


Figura 7.1

7.2 Vectores en el plano cartesiano

Recordemos:

En un **sistema de ejes cartesianos** un punto P queda determinado por un par ordenado de números reales (x, y) que reciben el nombre de **coordenadas** del punto P: x es la abscisa e y es la **ordenada**.

El término **coordenadas** es utilizado en el caso de los puntos.

El término **componentes** es utilizado en el caso de los vectores.

Como se ha visto en cursos anteriores, un **vector** es un segmento de recta orientado y dirigido que tiene un origen y un extremo.

Un vector es utilizado para representar las **magnitudes vectoriales**, que son aquellas que tienen módulo, dirección y sentido.

Son magnitudes vectoriales: el desplazamiento, la velocidad, la fuerza, la presión, el campo eléctrico, el campo magnético, el campo eléctrico.

Un vector puede ser representado con una letra en **negrilla** o una letra sin negrilla. En este último caso colocándole un flecha en su parte superior.

Con una letra en negrilla se tendrá que **a** se lee vector a.

En la escritura a mano, no resulta práctico utilizar para los vectores letras en negrilla, razón por la cual se escribe así:

Una letra sin negrilla y flecha en la parte superior $\vec{a}$. Se lee vector a.

Si P es el origen de un vector y Q el extremo, puede escribirse también el vector así: $\overrightarrow{PQ}$ ó **PQ**

Este último se lee: vector de origen P y extremo Q

7.3 Vectores fijos

Observemos en la figura 7.2 un punto P del plano cartesiano, el cual está representado por un par ordenado de números reales (x, y) que reciben el nombre de **coordenadas** del punto P. La primera componente del par, la cual es x, representa **la abscisa**; y la segunda componente que es y representa la **ordenada**.

Observemos la figura 7.3, en la que se tiene un vector de **origen** A, de coordenadas $A(a_1, b_1)$ y de **extremo** B de coordenadas $B(a_2, b_2)$.

Las componentes cartesianas de un vector se obtienen restando, ordenadamente, a las coordenadas de su extremo las coordenadas de su origen.

$A(a_1, b_1) \longrightarrow$ coordenadas del origen A

$B(a_2, b_2) \longrightarrow$ coordenadas del extremo B

Las componentes cartesianas del vector $\overrightarrow{AB}$ son: $\boxed{\overrightarrow{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)}$

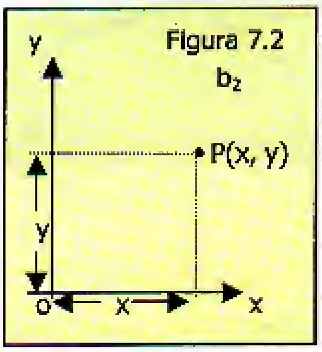


Figura 7.2

Coordenadas de P

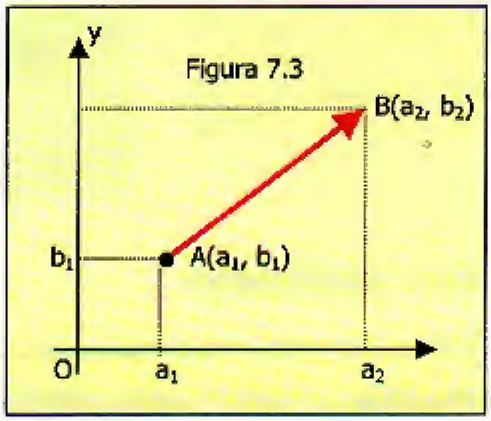


Figura 7.3

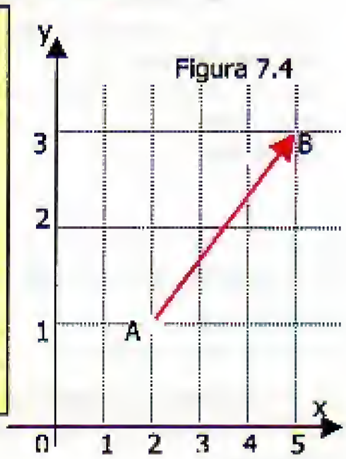


Figura 7.4

Ejemplo

En la figura 7.4 se tiene un vector **AB** con las características siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Coordenadas del origen } A(2, 1)\\ \text{Coordenadas del extremo es } B(5, 3).\end{array}\right\} \text{Componentes cartesianas de } \overrightarrow{AB} = (5 - 2, 3 - 1) = (3, 2)$$

Si deseamos trasladarnos desde A hasta B (figura 7.4) siguiendo las direcciones de los ejes coordenados, de manera que el movimiento se inicie en la dirección del eje ox, tendríamos que movilizarnos tres unidades en el sentido positivo del eje ox y dos unidades en el sentido positivo del eje oy. Este movimiento queda representado mediante el par ordenado de números reales (3, 2)

Componentes cartesianas del vector $\overrightarrow{AB} = (3, 2)$.

Las componentes cartesianas de $\overrightarrow{BA} = (2 - 5, 1 - 3) = (-3, -2)$.

Nótese que las componentes cartesianas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ son diferentes.

Definición de vector fijo

Un vector fijo AB es un segmento de recta orientado que queda determinado por un punto origen, $A(a_1, b_1)$, y un punto extremo, $B(a_2, b_2)$.
Las coordenadas del punto origen, $A(a_1, b_1)$, y del punto extremo, $B(a_2, b_2)$, determinan las **componentes,** $(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$ del vector fijo **AB**

7.4 Características de un vector

Todo vector fijo está dotado de una **dirección**, una **longitud** y un **sentido.**

- **La dirección** del vector fijo **AB** es la de la recta que pasa por A y B.
- **La longitud**, o **módulo** del vector **AB**, es la longitud del segmento orientado AB. Se representa por $|\mathbf{AB}|$ ó también escribiendo AB

  Se calcula aplicando el teorema de Pitágoras o la ecuación de la distancia entre dos puntos

  $$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(a_1 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

  En la figura 7.4 el módulo del vector **AB** viene dado así:

  $$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(5-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4}$$

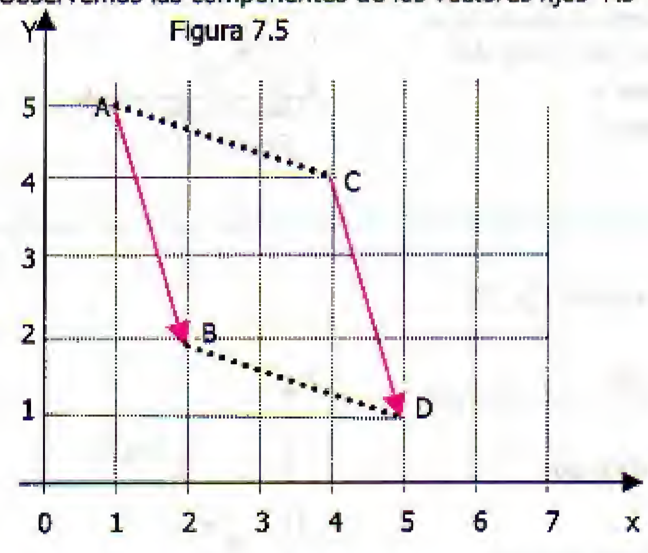
  $$|\mathbf{AB}| = \sqrt{13}$$

- **El sentido** del vector fijo **AB** es el que se define sobre la recta determinada por A y B cuando nos trasladamos de A a B

7.5 Vectores equipolentes

Observemos las componentes de los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ en la figura 7.5.

Figura 7.5



Tratemos de calcular las componentes d los vectores **AB** y **CD** de la figura 7.5.

$\overrightarrow{AB} = (2 - 1, 2 - 5) = (1, -3)$

$\overrightarrow{CD} = (5 - 4, 1 - 4) = (1, -3)$

Los vectores **AB** y **CD** tienen las mismas componentes y como consecuencia tendrán la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo.

A estos vectores con estas características se les dice **vectores equipolentes.**

Podemos definir desde el punto de vista geométrico:

Dos vectores fijos son **equipolentes** si tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo.

Observando el aspecto *analítico* podemos definir:

Dados dos vectores **v** =(x_1, y_1) y **w** = (x_2, y_2) ,se dice que son **equipolentes** si se verifican las siguientes igualdades: $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$

Si observamos la figura 7.5 podemos, *geométricamente*, reconocer dos vectores equipolentes que no estén sobre una misma recta:

Si dos vectores **AB** y **CD** no situados en la misma recta son equipolentes, al unir sus orígenes y sus extremos queda determinado un paralelogramo ABCD. Obsérvese la figura 7.5.

7.6 Expresión de un vector en forma polar

Se llama **vector de posición** de un punto, al vector que tiene su origen en el eje de coordenadas y su extremo en dicho punto. Así, el vector **OA** = **a** de la figura 7.6 representa el vector de posición del punto A y sus componentes cartesianas coinciden con las coordenadas del punto A

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = (x_1 - 0,\ y_1 - 0) = (x_1,\ y_1)$$

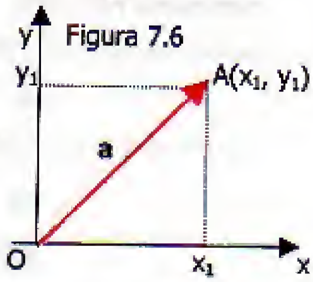


Figura 7.6

Si conocemos la longitud o magnitud del segmento OA = r y el ángulo α medido a partir del lado positivo del eje x, en sentido contrario a las manecillas del reloj hasta la representación del vector, es posible obtener la representación en **forma polar** de un vector a través de la rotación **OA** = (r , α), siendo r la magnitud del vector **OA**.

La componente X viene dada por **x = r cos** α

La componente y viene dada por **y = r sen** α

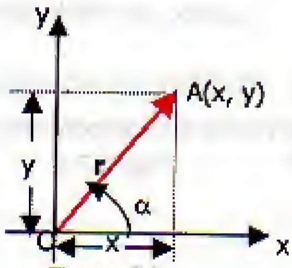


Figura 7.7

EJEMPLO 1

Expresar en forma polar el vector posición del punto P(4, 3)

La idea es calcular el módulo del vector $\overrightarrow{OP}$ y el valor del ángulo α.

La magnitud o módulo del vector $\overrightarrow{OP}$ viene dado por:

$$|\mathbf{OP}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Para determinar el ángulo α usamos la relación siguiente

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{3}{4} \longrightarrow \alpha = 36{,}87^\circ$$

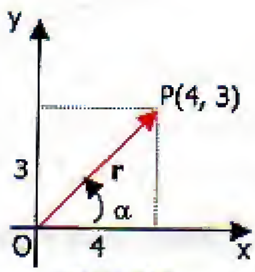


Figura 7.7

Luego el vector **OP** expresado en forma polar es:

OP = (5; 36,87°)

Ejemplo 2

Si nos dan un vector $\vec{a}$ = (4, 60°) expresado en forma polar es posible componentes en las direcciones de los ejes x e y así:

$$x = a \cos \alpha = 4 \,.\, \cos 60° = 4 \,.\, 1/2 = 2$$

$$y = a \text{ sen } \alpha = 4 \,.\, \text{sen } 60° = 4 .\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

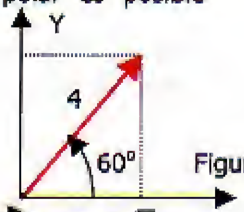


Figura 7.9

Luego el vector expresado por sus componentes cartesianas es $\vec{a} = (2,\ 2\sqrt{3})$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Se dan los puntos A(1, 4), B(-2, -4), C(3, 5), D(6, 2), E(5, -2), F(8, -2). Representa en el plano cartesiano los siguientes vectores: **a) AB b) CD c) EF d) AF.**

2. Se dan las coordenadas de los siguientes puntos: A(-1, 4); B(2, -5); C(5, -3); D(3, 5); E(0, -4); F(7, -2). Encontrar las componentes y la magnitud de cada uno de los siguientes vectores: a) **AB** b) **BC** c) **DC** d) **EF** e) **AF** f) **DE** g) **FC** h) **DB** i) **DA**
R: **a)** (3, -9); $3\sqrt{10}$ **b)** (3, 2); $\sqrt{13}$ **c)** (2, -8); $2\sqrt{17}$ **d)** (7, 2); $\sqrt{53}$ **e)** (8, -6); 10
f) (-3, -9); $3\sqrt{10}$ **g)** (-2, -1); $\sqrt{5}$ **h)** (-1, -10); $\sqrt{101}$ **i)** (-4, -1); $\sqrt{17}$

3. Dados los puntos P(-1, -3); Q(5, -2); R(0, 5); S(6, 4); T(3, -1); U(2, -3) dibuja sobre un eje de coordenadas los siguientes vectores: a) **PQ** b) **RS** c) **UT** d) **PR** e) **ST**

4. Sabiendo que las componentes de un vector **RS** = (4, -7) y las coordenadas de un punto R son: R(6, 2), determinar las coordenadas de el punto S de manera analítica. **R:** (10, -5).

5. Dadas las coordenadas de un punto B(5, -2) y las componentes de un vector **AB** = (-3, -2), encontrar las coordenadas del punto A. **R**: (8, 0).

6. Expresar en forma polar el vector posición de cada uno de estos puntos:

a) (1, -1) **b)** (-1, 1) **c)** $(-1, -\sqrt{3})$ **d)** $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ **e)** (-2, 5) **f)** $\left(\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$ **g)** (-58.8, 80.9)

R: a) $(\sqrt{2}, 135°)$ **b)** $(\sqrt{2}, 135°)$ **c)** (2, 240°) **d)** (2, 45°) **e)** $(\sqrt{29}, 112°)$ **f)** (7, 60°)
g) (100, 126°).

7. Dados los vectores en forma polar, escribirlos en forma de componentes:

a) u = (8.5, 244°) **b) v** = (8, 30°) **c) m** = (15, 270°) **d) n** = (1(8, 192°)

R: a) u = (-3.7, -7.6) **b) v** = (6.9, 4) **c) m** = (0, -15) **d) n** = (-17.6, -3.7)

8. Dos vectores vienen dados por sus componentes así: **a** = (-3, 1) y **b** = (x + 2y, x − y) Encontrar los valores de x e y suponiendo que los vectores **a** y **b** sean equipolentes.

R: x = -1, y = -2

9. El vector **a** tiene de origen el punto (0,1) y el extremo es el punto (2, -3). Otro vector **b** equipolente al anterior, tiene el origen en el punto (2, -4). Hallar las coordenadas de su extremo.

R: (4, -8).

10. Considera los puntos A(3, -2), B(5,4), C(1, -5) y D(x, y). Calcular las coordenadas del punto D sabiendo que los vectores **AB** y **CD** son equipolentes. **R**: D(3, 1).

11. Dado el vector **a** = (x, 2) encontrar el valor de x para que se cumpla que el módulo de **a** sea igual a 5. **R:** x = $\sqrt{21}$.

12. Dados los puntos siguientes: P(-1/2, 1); Q(2, -1/2); R(-3/2, 1/4). a) hallar las componentes de los vectores **PQ** y **QR** b) calcular el módulo de los vectores **PQ** y **QR.**

R: a) **PQ** = (5/2, -3/2) **QR** = (-7/2, 3/4) b) $\frac{1}{2}\sqrt{34}$ y $\frac{1}{4}\sqrt{205}$

13. Los vértices de un paralelogramo son: A(0, 0); B(4, 0); C(0, 3); D(a, b). a) Partiendo de un eje de coordenadas determina las coordenadas del vértice D. B) calcula las componentes de los vectores **CD** y **AB.** C) ¿Qué puedes decir respecto a los vectores **CD** y **AB.**?

R: a) D(4, 3) b) **CD** = (4, 0) y **AB** = (4, 0) c) son equipolentes.

14. Las coordenadas de dos puntos son: P(-1, -3) y Q(2, -1). Hallar las componentes de un vector **AB** opuesto a **PQ**. **R: AB** = (2, -4).

15. Dados los puntos del plano: A(-4, -1); B(-8, -4); C(7, 4); D(3, 1). Dibuja en un plano cartesiano los vectores **AB** y **CD**. ¿Son **AB** y **CD** equipolentes?. Explica tu razonamiento. Dibuja un vector equipolente a los vectores anteriores.

16. En cada caso encuentra los valores desconocidos para que cada par de vectores sea equipolentes:

a) **A** = (6 − a, 1) y **B** = (-2, b − 3)
b) **H** = (1/2, -n) y **V** = (-3, 2)
c) **P** = (m − n, 3) y **Q** = (2, - n)
d) **C** = (3, -1) y **D** = (6x − 3/2, -1/2)

R: a) 8 y 4 **b)** 7/2 y 5/2 **c)** −1 y −3 **d)** 1/2 y 3/2

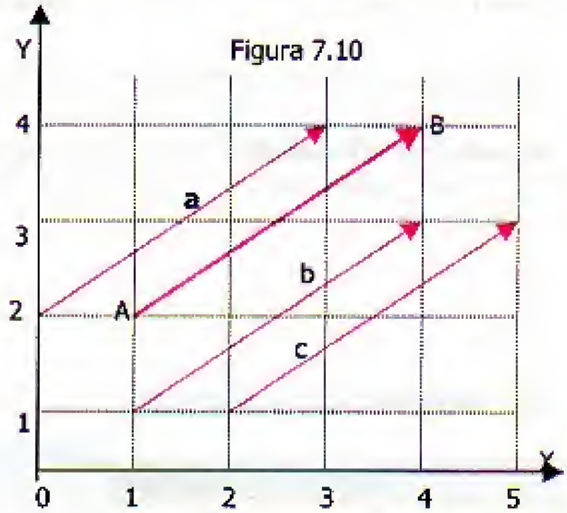
7.7 Vectores libres del plano

Observemos la figura de la derecha, donde se muestran varios vectores fijos, que a pesar de tener distintos su origen y su extremo son la representación de un mismo movimiento en el plano. Ellos en forma geométrica tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo.

En forma analítica, todos esos vectores tienen las mismas componentes y, como consecuencia, de acuerdo a la definición son equipolentes. Representan, por tanto, un mismo vector que denominaremos **vector libre.**

a = b = c = (3, 2)

Figura 7.10



Del análisis podemos decir:

Se denomina **vector libre** al conjunto de vectores equipolentes a uno dado

Cada uno de los vectores fijos que componen un vector libre es un **representante** de este vector.

Así, **[AB]** representa el vector libre formado por todos los vectores equipolentes al vector fijo **AB.**

Es importante insistir que un *vector libre no es un vector*, sino un conjunto de infinitos vectores todos equipolentes entre sí, y que, cada vector de un vector libre es un representante de éste.

Cuando se representen vectores libres en un plano cartesiano es posible ubicar sus orígenes en cualquier punto. Por esta razón se ubican con su origen en el origen del plano cartesiano.

7.8 Vectores notables

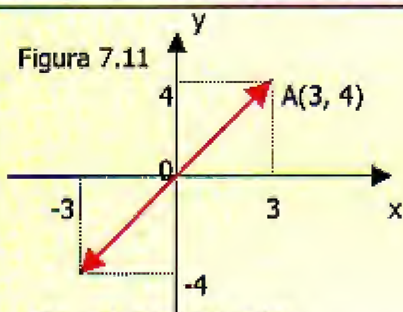
En el conjunto de los vectores libres existen algunos que presentan unas características esenciales que permiten distinguirse de los demás. Ellos son:

El vector nulo: es aquel cuyo módulo es cero, coincidiendo en un mismo punto su origen y su extremo. Sus componentes vienen dadas por (0,0).

Los vectores opuestos: son aquellos, que teniendo el mismo módulo y la misma dirección tienen sentidos opuestos.

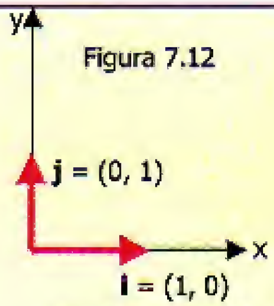
Dos vectores opuestos tienen sus respectivas componentes opuestas. En la figura 7.10 los vectores **OA** = (3, 4) y **OB** = (-3, -4) son opuestos.

Figura 7.11



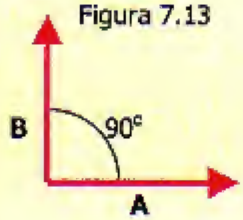
Dos vectores opuestos

Figura 7.12



Vectores unitarios

Figura 7.13



Vectores ortogonales

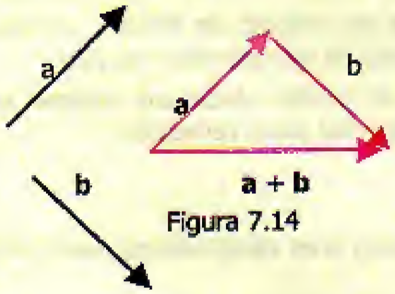
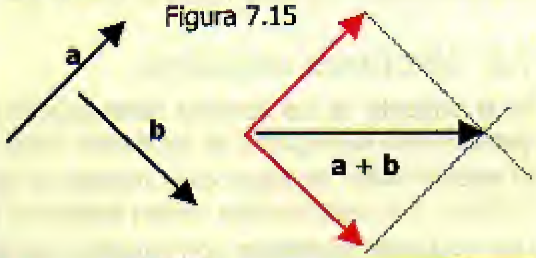
El vector unitario: es aquel vector cuyo módulo es igual a la unidad, caracterizándose porque una de sus componentes es cero y la otra es diferente de cero. Ver figura 7.12.

Las componentes de un vector unitario vienen dadas así: **i** = (0, 1) y **j** = (1, 0)

Los vectores ortogonales. Son aquellos vectores que forman entre sí un ángulo de 90°, es decir, son perpendiculares entre sí. En la figura 7.13 se muestran dos vectores perpendiculares.

7.9 Adición de vectores

Método geométrico

Método del triangulo	Método del paralelogramo
Consideremos dos vectores libres **a** y **b** como los mostrados en la figura. Copiamos por el extremo de **a** un vector equipolente a **b** y luego unimos el origen de **a** con el extremo de **b**, tal como lo muestra la figura 7.14 El vector obtenido le llamaremos el vector suma de los vectores **a** y **b**, denotándolo como **a + b**  Figura 7.14	Consideremos nuevamente los dos vectores libres **a** y **b**. Por el origen de **a** se construye un vector equipolente al vector **b**. Figura 7.15. Por el extremo de **a** se dibuja una paralela al vector **b** y por el extremo de **b** se dibuja una paralela el vector **a**. Se dibuja un vector sobre la diagonal del paralelogramo, el cual tiene su origen en el origen de los vectores y su extremo en el punto donde se cortan las paralelas. Este vector lo llamaremos suma de **a** y **b**. Figura 7.15 

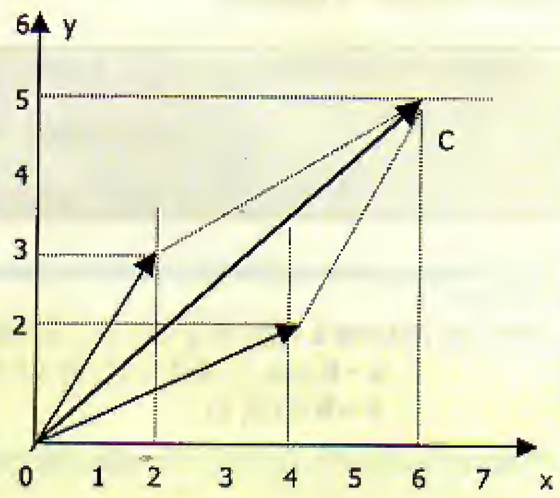
Método analítico

Consideremos los vectores **OA** y **OB**, dados por sus componentes **OA** = (2, 3) y **OB** = (4, 2).
Si aplicamos la regla del paralelogramo para efectuar la suma de dichos vectores, encontramos el vector **OC** cuyas componentes son **OC** = (6, 5).
Al observar las componentes del vector **OC** y las comparamos con las componentes de los vectores **OA** y **OB** nos daremos cuenta que las componentes del vector **OC** son la suma de las componentes de **OA** y **OB**.

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{OA} = (2, 3)\\ OB = (4, 2)\\ \mathbf{OC} = (6, 5)\end{array}\right\} \begin{array}{l} OA + OB = OC \\ (2, 3) + (4, 2) = (6, 5)\end{array}$$

Si dos vectores, están dados por sus componentes, las componentes del vector suma son obtenidas al sumar las componentes respectivas de los vectores sumandos.

Figura 7.15



Si **a** = (x_1, y_1) y **b** = (x_2, y_2), la suma de **a** y **b** viene dada así:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Ejemplo

Dados los vectores **m** = (-1/2, 3); **n** = (2, -1/2); **s** = (3, 2) y **u** = (1/2, 3), determinar un vector **p** tal que **a)** **p = m+n** **b) p = s + u** **c) p = m + u**

Solución

a) p = m+n = (-1/2, 3) + (2, -1/2) = (3/2, 5/2) **b) p = s + u** = (3, 2) + (1/2, 3) = (7/2, 5)

c) p = m + u = (-1/2, 3) + (1/2, 3) = (0, 6)

7.10 Resta de vectores

Antes hemos estudiado que dos vectores son opuestos cuando teniendo igual magnitud y dirección tienen sentidos opuestos. Si dos vectores son opuestos, sus componentes son opuestas, tal como ocurre con los vectores **a** = (-2, 5) y **b** = (2, -5)

Para restar dos vectores se suma al primero el opuesto del segundo, pudiéndose escribir en el plano cartesiano lo siguiente:

Dados dos vectores **a** = (x_1, y_1) y **b** = (x_2, y_2) en el plano cartesiano, la diferencia **a** menos **b** queda definida de la manera siguiente:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Ejemplo

Dados los vectores a = (1, 5) y b = (4, -3), hallar la diferencia a – b

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = (1, 5) + (-4, 3) = (1 - 4, 5 + 3) = (-3, 8)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (-3, 8)$$

Propiedades de la adición de vectores

Propiedad asociativa Dados los vectores **a**, **b** y **c** se cumple que: (**a** + **b**) + **c** = **a** + (**b** + **c**)	**Propiedad conmutativa** Para el par de vectores **a** y **b** se cumple que: **a** + **b** = **b** + **c**
Elemento neutro (vector nulo) Para todo vector **a** se verifica que: **a** + **0** = **0** + **a** = **a** donde **0**, el vector nulo, es el elemento neutro para la adición de vectores. **0** = (0, 0)	**Elemento simétrico** (vector opuesto) Cada vector **a** tiene un vector opuesto, que representamos como –**a**, que verifica: **a** + (-**a**) = **0**

7.11 Multiplicación de un número real por un vector

Dibujemos el vector **OA** = (3, 2) y a continuación el vector **OB** = (6, 4), tal como lo muestra la figura 7.17.

Se trata de dos vectores que tienen la misma dirección y el mismo sentido.

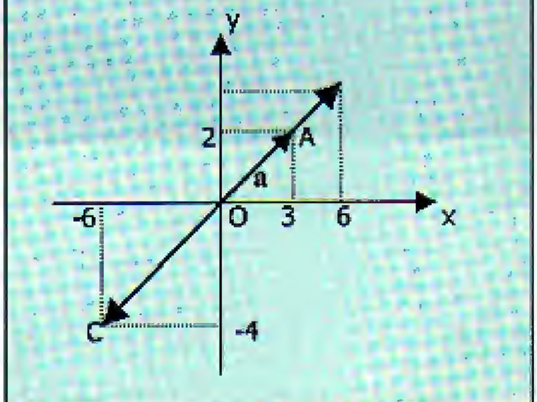
Nótese que las componentes del vector **OB** pueden obtenerse multiplicando por 2 las componentes del vector **OA**.

(6, 4) = 2(3, 2) ó **OB** = 2.**OA**.

En el caso del vector **OC**, sus componentes (-6, -4) se obtienen de multiplicar por –2 las componentes del vector **OA**.

(-6, -4) = -2(3, 2) ó **OC** = -2. **OA**

Figura 7.17



De las observaciones realizadas podemos escribir que:

Dado un vector libre **a** = (x_1, y_1) y un número real k, llamaremos *producto de un número k por el vector* **a**, a otro vector cuyas componentes se obtienen multiplicando el número real k por cada una de las componentes del vector dado.

$$k.\mathbf{a} = (k\,x_1, k\,x_2).$$

Este producto de un número real por un vector libre puede tener diversas interpretaciones:

- Si k = 0, entonces k . **a** = **0**.
- Si k > 0, el vector k . **a** es un vector libre de la misma dirección y sentido que **a** y con un módulo k veces el módulo de **a**.
- Si k < 0, el vector k . **a** es un vector libre de la misma dirección que **a**, con sentido opuesto y con un módulo k veces el módulo de **a**.

Ejemplo

Dado el vector **a** = $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ y el número real k = $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, evaluar k. **a**

$$k.\,\mathbf{a} = -\frac{2}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = (\frac{2}{2\sqrt{3}}, -\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -1) \longrightarrow k\,.\,\mathbf{a} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -1)$$

Como el producto k . **a** es un vector, podemos calcular el módulo de este vector así:

$$|k\mathbf{a}| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \sqrt{\frac{1+3}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Propiedades del producto de un número real por un vector

Si k, k_1, k_2 son números reales con **a** y **b** vectores se tendrá que:

P.1	K . (**a** + **b**) = k.a + kb	**P.3**	(k_1 . k_2) . **a** = k_1 . (k_2 . **a**)
P.2	(k_1 + k_2) . **a** = k_1 .	**P.4**	1 . **a** = **a**

Ejemplo 1

Dados los vectores **u** = $(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ **v** = $(-\sqrt{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$ **w** = $(\frac{2}{\sqrt{3}}, -5\sqrt{3})$, evaluar la expresión:

$$\sqrt{3}\,\mathbf{u} - [\sqrt{2}\,\mathbf{v} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{w}] =$$

$$\sqrt{3}\,\mathbf{u} - [\sqrt{2}\,\mathbf{v} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{w}] = \sqrt{3}(\frac{1}{2}, \sqrt{3}) - [\sqrt{2}(-\sqrt{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{2}{\sqrt{3}}, -5\sqrt{3})]$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2},3) - [(-2,-3) + (\frac{2}{3},-5)]$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2},3) - (-\frac{4}{3},-8) = (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{3}, 3+8) = (\frac{3\sqrt{3}-8}{6}, 11)$$

Ejemplo 2

Dados los vectores $\mathbf{a} = (-1,-3)$ $\mathbf{b} = (\frac{1}{2},-1)$ $\mathbf{c} = (0,-\frac{5}{4})$ encontrar los valores de k_1 y k_2 para que se verifique la siguiente igualdad: $k_1.\mathbf{a} + k_2.\mathbf{b} = \mathbf{c}$

Solución

Sustituyendo los vectores por sus componentes en la expresión se tiene que:

$$k_1.(-1,-3) + k_2(\frac{1}{2},-1) = (0,-\frac{5}{4})$$

$(-k_1,-3k_1) + (\frac{1}{2}k_2,-k_2) = (0,-\frac{5}{4})$ (aplicando el producto de un número real por un vector)

$(-k_1 + \frac{1}{2}k_2, -3k_1 - k_2) = (0,-\frac{5}{4})$ (por suma analítica de vectores)

Si dos vectores son iguales sus componentes son iguales, por lo que podemos escribir que:

$$\begin{cases} -k_1 + \frac{1}{2}k_2 = 0 \text{ ....(I)} \\ \text{y} \\ -3k_1 - k_2 = -\frac{5}{4} \text{ ....(II)} \end{cases}$$

Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas debe ser resuelto por cualquier método. Nosotros lo haremos por el método de sustitución.

Despejando k_1 en la ecuación (I) se tiene que $k_1 = \frac{1}{2}k_2$ ....(III)

Sustituyendo k_1 en la ecuación (II) obtendremos que:

$$-3.\frac{1}{2}k_2 - k_2 = -\frac{5}{4}$$

$$-\frac{3}{2}k_2 - k_2 = -\frac{5}{4} \longrightarrow -\frac{5}{3}k_2 = -\frac{5}{4} \longrightarrow k_2 = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo este valor de k_2 en la expresión (III) nos queda que:

$$K_1 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Luego $\boxed{K_1 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{1}{4}}$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Dados los vectores **a** = $(-\frac{1}{3}, 2)$; **b** = $(-1, -\frac{1}{2})$, demuestra analíticamente la propiedad conmutativa de la adición de vectores.

2. Dados los vectores **u** = $(-2, \frac{1}{2})$; **v** = $(-\frac{1}{2}, -3)$; **w** = (4 , -5), demuestra analíticamente la propiedad asociativa de la adición de vectores.

3. Dados los vectores **a** = (x, y) y **b** = (-2, -1), ¿Qué valores deben tener x e y para que se verifique la siguiente igualdad 2**a** + **b** = (2, -3) **R:** x = 2; y = -1.

4. Dados los vectores **x** = $(1, \frac{1}{2})$; **y** = (-3, 2); **z** = $(-\frac{1}{2}, 5)$ y los números reales m = $\frac{1}{2}$, n = 3, evaluar:

a) m**x** + n**y** b) m[**x** + n**z**] c) [n**z** + m**y**] – n**x**

R: a) (- 17/2, 25/4) b) (- 1/4, 31/4) c) (-6, 29/2)

5. Calcula las componentes y el módulo de los siguientes vectores:

a) $\mathbf{w} = -3(-\frac{1}{3}, 3) + \sqrt{2}(\frac{2}{3\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{3})$ b) $\mathbf{v} = (5, \sqrt{3}) - \sqrt{6}(1, -\sqrt{2})$

R: a) **w** = (5/3, -25/3) $|\mathbf{w}| = \frac{5}{3}\sqrt{26}$ b) $\mathbf{v} = (5 - \sqrt{6}, \sqrt{3} + \sqrt{12}$ $|\mathbf{v}| = \sqrt{58} - 10\sqrt{6}$

6. Se tienen los vectores **u** = (x, y) **v** = (-1, 1/2) y **w** = (3, -1). Calcular el valor de las componentes de **u** para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) 2**u** = **v** +3**w** b) **v** = 2**u** – 2**w** **R:** a) x = 4 y = -5/4 b) x = 5/2 y = -3/4

7. Se dan los vectores siguientes: **u** = $(-\frac{3}{2}, -1)$; **v** = (2, 1); **w** = $(\frac{1}{4}, -1)$. Encontrar los valores de los números reales α y β para que se cumpla la siguiente igualdad: α**u** + β**v** = **w**

R: α = 9/2 y β = 7/2.

8. Si el racional k = 3 y los vectores **a** = (2, -5) y **b** = (4, -3) verificar que k(**a** + **b**) = k**a** + k**b** (propiedad distributiva de una escalar con respecto a la adición de vectores).

9. Dados los racionales α = 5 β= 3 y el vector **a** = (-4, -2) verificar que se cumple la siguiente igualdad (α + β)**a** = α**a** + β**a**. Propiedad distributiva de un vector con respecto a la adición de racionales.

10. Si en un vector **a** = (x, y) la primera componente se aumenta en cuatro unidades y la segunda componente se duplica se obtiene un vector **b** = (-2, -3). ¿Cuáles son las componentes del vector **a**.? **R:** x = -6 y = -1/2.

11. Se dan los puntos A(0, -2); B(4, -1); C(-2, 4). Encontrar los valores de las componentes de un vector **V** = (m + 3, n – 2) para que se cumpla la igualdad **BA** + **BC** – **AC** =**V**

R: V = (-9, -2).

7.12 Vector combinación lineal

Tratemos de entender esto a través del siguiente ejemplo:

Consideremos los vectores **u** = (3, 4) y **v** = (-1, -7).

¿Qué vector se obtiene al realizar la siguiente operación?: 2**u** + 3**v**

Llamemos **w** al vector que obtendremos, pudiéndose escribir que:

W = 2**u** + 3**v** = 2(3, 4) + 3(-1, 7) = (6, 8) + (-3, 21) = (6 – 3, 8 + 21) = (3, 29)

W = (3, 29)

Luego el vector **w** = 2**u** + 3**v**

Se dice entonces, que el vector **w** es una **combinación lineal** de los vectores **u** y **v**

De acuerdo al análisis podemos definir así:

Se dice que un vector **w** es **combinación lineal** de un conjunto de dos vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ si existen un par de números reales k_1, k_2 tal que se cumpla que:

$$\mathbf{W} = k_1.\mathbf{u}_1 + k_2.\mathbf{u}_2$$

7.13 Dependencia e independencia lineal de vectores

La condición que deben cumplir dos vectores **a** y **b**, para que uno de ellos sea combinación lineal del otro es que exista un número real k tal que **a** = k.**b**. Esta igualdad sólo es posible si los vectores **a** y **b** tienen la misma dirección

Observemos la figura 7.18 donde están los vectores **a** = (2, 1) **b** = (4, 2).

Nótese que **b** = 2.**a**. Esto sólo es posible si los vectores **a** y **b** tienen la misma dirección, son colineales. Decimos que los vectores son **linealmente dependientes.**

Si los vectores tales como **c** y **d** no tienen la misma dirección no será posible hallar un número real que verifique la igualdad. Diremos, que los vectores **c** y **d** son **linealmente independientes.**

Los vectores **c** y **d** son no paralelos

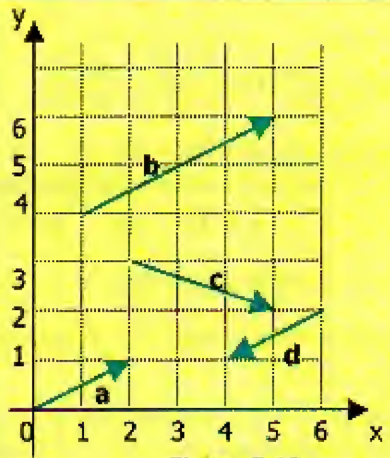


Figura 7.18

De acuerdo al análisis podemos decir:

Dos vectores que tienen la misma dirección siempre son **linealmente dependientes.**
Dos vectores que tienen distinta dirección siempre son **linealmente independientes.**

Definiciones

Dado un conjunto de vectores, se dice que son **linealmente dependientes** si uno cualquiera de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.

Dado un conjunto de vectores, se dice que son **linealmente independientes**, si ninguno de ellos es combinación lineal de los demás.

Ejemplo 1

Dados los vectores **u** = (-3, 2); **v** = (-2, -1) y **w** = (-2, - 3/4). Expresar **w** como combinación lineal de los vectores **u** y **v**.

Solución

De acuerdo con la definición de combinación lineal deben existir dos números reales k_1 y k_2 tales que se verifique lo siguiente: $\mathbf{w} = k_1.\mathbf{u} + k_2.\mathbf{v}$

$(-2, -3/4) = k_1(-3, 2) + k_2(-2, -1)$ (sustituyendo por las componentes de los vectores)

$(-2, -3/4) = (-3k_1, 2k_1) + (-2k_2, -k_2)$ (producto de un número real por un vector)

$(-2, -3/4) = (-3k_1 - 2k_2, 2k_1 - k_2)$ (suma de las componentes de los vectores)

Si dos vectores son iguales sus componentes son iguales, pudiéndose escribir que:

$$-3k_1 - 2k_2 = -2 \quad \text{y} \quad 2k_1 - k_2 = -3/4.$$

Como este par de ecuaciones se verifica simultáneamente, es necesario resolver el sistema para encontrar los valores de k_1 y k_2.

Resolvemos el sistema por el método de reducción, multiplicando la segunda ecuación por −2.

$$\begin{array}{r} \\ -2 \end{array}\left\{\begin{array}{l} -3k_1 - 2k_2 = -2 \\ 2k_1 - k_2 = -3/4. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} -3k_1 - 2k_2 = -2 \\ -4k_1 + 2k_2 = -3/2 \end{array}\right. \atop \overline{-7k_1 \qquad = -7/2}$$

Al despejar el valor de k_1 nos queda que $k_1 = 1/2$

Sustituyendo el valor de k_1 en la primera ecuación del sistema original obtendremos que:

$$-3(1/2) - 2k_2 = -2 \longrightarrow -\frac{3}{2} - 2k_1 = -2 \longrightarrow -2k_1 = -2 + \frac{3}{2} \longrightarrow -2k_1 = -\frac{1}{2}$$

Despejando k_1 tenemos que $k_1 = 1/4$

Hemos encontrado los valores de k_1 y k_2 que cumplen con la condición antes expuesta

Luego **w** ha sido expresado como combinación lineal de los vectores **u** y **v**

Ejemplo 2

Dados los vectores p = (2, -1); q = (5, 2); r = (11, -1). Verificar si son linealmente dependientes.

Solución

De acuerdo con la definición, un vector cualquiera puede ser expresado como combinación lineal de los demás. Intentemos expresar el vector r como combinación lineal de los otros dos:

Deben existir dos números reales k y h tales que **r** = k.**p** + h.**q**

$(11, -1) = k(2, -1) + h(5, 2)$ (sustituyendo los vectores por sus componentes)

$(11, -1) = (2k, -k) + (5h, 2h)$ (producto de un número real por un vector)

$(11, -1) = (2k + 5h, -k + 2h)$ (sumando las componentes de los vectores)

Aplicando la igualdad de componentes se tendrá que: $2k + 5h = 11$ y $k + 2h = -1$. Este par de ecuaciones deben verificarse simultáneamente, razón por la cual debe resolverse el sistema.

Resolvemos el sistema de ecuaciones formado, para obtener los valores de h y k

$$\begin{cases} 2k + 5h = 11 \text{ .....(I)} \\ -k + 2h = -1 \text{ .....(II)} \end{cases}$$

Despejando k de la ecuación (II) se tiene que $k = 2h + 1$.......(III)

Sustituyendo este valor en la ecuación (I) se tiene que

$$2(2h + 1) + 5h = 11 \longrightarrow 4h + 2 + 5h = 11 \longrightarrow 9h = 11 - 2 \longrightarrow 9h = 9 \longrightarrow h = 1$$

Sustituyendo este valor de h en la expresión (III) se tendrá que:

$K = 2.1 + 1 = 2 + 1 = 3 \longrightarrow k = 3$

Hemos logrado así, expresar un vector como combinación lineal de los otros dos, lo que nos conduce a decir que los vectores p, q y r son linealmente dependientes.

Ejemplo 3

Dados los vectores **a** = (-2, 1); **b** = (4, 2); **c** = (-6, -3). Ver si **a** es combinación lineal de los vectores **b** y **c**.

Solución

Por definición deben existir dos números reales α y β tales que se cumpla que:

a = α **b** + β **c**

$(-2, 1) = \alpha(4, 2) + \beta(-6, -3)$ (sustituyendo los vectores por sus componentes)

$= (4\alpha, 2\alpha) + (-6\beta, -3\beta)$ (producto de un número real por un vector)

$(-2, 1) = (4\alpha - 6\beta, 2\alpha - 3\beta)$ (sumando las componentes de los vectores)

$4\alpha - 6\beta = -2$ y $2\alpha - 3\beta = 1$ (aplicando igualdad de componentes)

Resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 4\alpha - 6\beta = -2 \\ 2\alpha - 3\beta = 1 \end{cases}$$

Si despejamos α de la segunda ecuación nos queda $\alpha = (1 + 3\beta)/2$

Sustituyendo en la primera nos queda que $4[(1 + 3\beta)/2] - 6\beta = -2$

Efectuando operaciones encontramos que $4 + 6\beta - 6\beta = -2$

De donde $4 = -2$ lo cual no puede ser

Esto nos está indicando que el sistema de ecuaciones no tiene solución y como consecuencia los vectores **b** y **c** no son combinación lineal del vector **a**

Observaciones

- Al no existir ningún número real capaz de satisfacer al sistema de ecuaciones planteado es posible concluir también que los vectores **a**, **b** y **c** son **linealmente independientes**.
- De acuerdo a esto último estamos ratificando la definición que dimos antes: Dos o más vectores, se dice que son **linealmente independientes**, si ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.

Ejemplo 4

Verificar la dependencia e independencia de los vectores **u** = (-2, 4) y **v** = (-6, 12)

Debemos ver si es posible expresar **v** como una combinación lineal de **u**. Para ello debemos escribir que:

v = k **u**

(-6, 12) = k(-2, 4) (sustituyendo los vectores por sus componentes)

(-6, 12) = (-2k, 4k) (producto de un número real por un vector en el segundo miembro)

-2k = -6 y 4k = 12 (igualando componentes)

De $-2k = -6 \longrightarrow$ **k = 3** y De $4k = 12 \longrightarrow$ **k = 3**

Hemos encontrado un valor de K = 3 capaz de satisfacer a ambas ecuaciones.

Esto nos indica que los vectores **u** y **v** son **linealmente dependientes**

7.14 La base canónica del espacio vectorial R^2

Hemos visto que, dados dos vectores no nulos **u** y **v** de diferente dirección y cualquier otro vector, **w**, es posible encontrar dos números reales, k_1 y k_2, de manera que:

$W = \mathbf{k_1} \cdot u + \mathbf{k_2} \cdot v$

En este caso decimos que el conjunto B = {**u**, **v**} constituyen ***una base*** del conjunto de los vectores libres $\mathbf{V_2}$. y a los números reales k_1 y k_2 les llamaremos **componentes** de **w** en la base formada por **u** y **v**, escribiéndose que **w** = (k_1, k_2).

Así, si **w = 5u** + **2v**, diremos que las **componentes** de **w** en la base formada por **u** y **v** son (5, 2), escribiéndose que:

W = (5, 2)

Existen muchas bases del plano, tantas como pares de vectores linealmente independientes es posible encontrar. De todas esas bases, es especialmente importante la constituida por los siguientes vectores **i** = (1, 0) y **j** = (0, 1) los cuales conocemos con el nombre de **base canónica.** Ellos son los vectores unitarios y son paralelos a los ejes coordenados. Figura 7.19

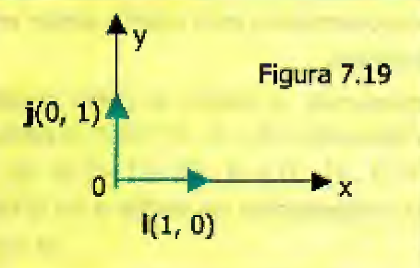


Figura 7.19

Cualquier vector del plano puede ser expresado como combinación lineal de los vectores de la **base canónica.**

Así, el vector **a** = (4, 3) de la figura 7.20 puede ser expresado como combinación lineal de los vectores de la base canónica.

a = (4, 3) = 4(1, 0) + 3(0, 1) = 4i + 3j

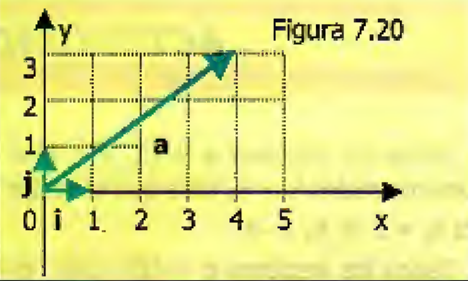


Figura 7.20

Una base del plano está constituida por dos vectores linealmente independientes.

EJEMPLO 1

¿Constituyen una base del plano los vectores (1, 2) y (-3, 1)?. En caso de respuesta positiva, exprésese el vector (-3, 8) como una combinación lineal de los vectores de la base.

Solución

Nos basta con averiguar si los vectores son linealmente independientes.

Obsérvese que $(1, 2) \neq k(-3, -1)$ porque $1/-3 \neq 2/1$.

Por tanto, los dos vectores son linealmente independientes y, en consecuencia constituyen **una base** del plano.

Expresemos el vector (-3, 8) como una combinación lineal de los vectores de la base.

$(-3, 8) = h . (1, 2) + t . (-3, 1)$

$(-3, 8) = (h, 2h) + (-3t , t)$ (producto de un número real por un vector).

$(-3, 8) = (h - 3t, 2h + t)$ (por adición de vectores por componentes).

Por igualación de componentes podemos escribir que: $-3 = h - t$ y $8 = 2h + t$

La solución del sistema $\begin{cases} -3 = h - t \\ 8 = 2h + t \end{cases}$ es $h = 3$ y $t = 2$. Compruébalo.

Luego $(-3, 8) = 3 . (1, 2) + 2 . (-3, 1)$.

Los números que hemos calculado, tales como $h = 3$ y $t = 2$ son llamados **componentes** del vector (-3, 8) en **la base** B = {(1,2), (-3, 1)}.

Ejemplo 2

Las componentes de un vector **v** en la base {(1, 3), (2, -1)} son (-2, 4). ¿Cuáles son las componentes de este mismo vector en la base canónica?.

Solución

Expresemos el vector **v** como combinación lineal de los vectores de la base, para lo cual las componentes de (-2, 4) harán el papel de los números reales h y t

$\mathbf{v} = -2 . (1, 3) + 4 . (2, -1) = (-2, -6) + (8, -4) = (-2 + 8, -6 + (-4)) = (6, -10)$

Las componentes del vector **v** en la base canónica son: (-6, -10)

$$\mathbf{v} = (-6, -10) = -6. (1, 0) - 10 . (0, 1)$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Dados los vectores **a** = (2, 3); **b** = (-1, 6) y **c** = (10, -15). Determinar los valores de los números reales k_1 y k_2 para que el vector **c** sea una combinación lineal de los vectores **a** y **b**.

R: $k_1 = 3$ y $k_2 = -4$.

2. Dados los vectores **p** = (17, 13); **q** = (-1, 7) y **r** = (5, -2), expresar el vector **p** como una combinación lineal de los vectores **q** y **r**.

R: p = 3q + 3r

3. Dados los vectores **u** = (1, -1); **v** = (-2, 1); **w** = (8, -5), expresar el vector **w** como una combinación lineal de los vectores **u** y **v**. **R: w = 2u – 3v**

4.Verificar si los vectores **u**(2, 0); **v**(1, -2) y **w**(4, -8) son linealmente dependientes. En caso de serlo expresar uno de ellos como combinación lineal de los otros.

R: son linealmente dependientes. **W** = 0.**u** + 4.**v**.

5. Verificar la dependencia e independencia lineal de los vectores **u** = (2, 0); **v** = (1, -2).

R: son linealmente independientes.

6. Dado el vector **p** = (x, y) y los vectores **q** = (-1, -3); **r** = (-2, 1). Hallar los valores de las componentes x e y para que se verifique la igualdad **r** = 3**p** – 2**q**

R: x = -4/3 y = -5/3

7. Dados los vectores **a** = (-3, 2); **b** = (-2, -1); **c** = (5, 2). Encontrar los valores de k_1 y k_2 para que se verifique la igualdad **c** = k_1**a** + k_2**b**.

R: $k_1 = -1/2$ $k_2 = 1/4$

8. En cada uno de los pares de vectores, razona cuáles de ellos son linealmente independientes y, como consecuencia constituyen una base de los vectores libres del plano. Luego expresa el vector **w** = (3, 1) como combinación lineal de las bases que hayas encontrado.

a) **u** = (1, 1) **v** = (0, 2) b) $\mathbf{v}_1 = (1/3, -1/2)$ $\mathbf{v}_2 = (-2, 3)$

c) $\mathbf{z}_1 = (-2, \frac{\sqrt{3}}{3})$ $\mathbf{z}_2 = (-2\sqrt{3}, 1)$ d) $\mathbf{e}_1 = (1, 2)$ $\mathbf{e}_2 = (-2, 1)$

R: a) y d) **w** = 3**u** – **v** $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$

9. Comprobar que los vectores $\mathbf{u}_1 = (2, 0)$ y $\mathbf{u}_2 = (1, -2)$ constituyen una base. Hallar luego las componentes en esa base de un vector que en la base canónica es **v** = (4, -8). **R**: **w** = (0, 4)

10. Las componentes de un vector **p** en la base B = [(4, 1), (5, -2] son (3, -1). Determina las componentes de **p** en la base canónica.

R: **p** = (-2, 11)

11. Las componentes de los vectores **u**, **v**, y **w** en una cierta base son: **u** = (-1, 2), **v** = (2, 3) y **w** = (1, 0). Expresa cada uno de estos vectores como combinación lineal de los otros dos.

R: $\mathbf{u} = \frac{2}{3}\mathbf{v} - \frac{7}{3}\mathbf{w}$ $\mathbf{v} = \frac{3}{2}\mathbf{u} - \frac{7}{2}\mathbf{w}$ $\mathbf{w} = \frac{-3}{7}\mathbf{u} - \frac{2}{7}\mathbf{v}$

12. Dados los vectores **u** = (a, b) y **v** = (-10, -20); y el número real –3/5. Encontrar los valores de a y b para que el vector **u** pueda ser expresado como una combinación lineal de **v**.

R: a = 6 b = 12

13. Dados los vectores **p** = (-2/5, 1/10) **q** = (-3/2, 2) y **r** = (-1/5, -1). Encontrar los valores de dos números reales para que el vector **p** pueda escribirse como combinación lineal de los vectores **q** y **r**

R: 1/5 y 1/2

14. Escribir cada uno de los vectores dados como una combinación lineal de los vectores de la base canónica: a) **u** = (2, -3) b) **v** = (5, -2) c) **w** = (4, -8) d) **p** = (-5, -3) e) **q** = (-1, 5)

R: a) **u** =2**i** – 3**j** b) 5**i** – 2**j** c) 4**i** – 8**j** d) -5**i** – 3**j** e) –**I** + 5**j**

7.15 Producto escalar de dos vectores

El producto escalar es una operación definida en el conjunto de los vectores libres que asocia a cada par de vectores un número real.

Definición

El **producto escalar** de dos vectores no nulos **a** y **b**, que se representa como **a.b** es el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman, escribiéndose:

$$\mathbf{a.b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\cos\alpha$$

siendo α el menor de los ángulos que forman las semirrectas que contienen a los vectores. Fig. 7.21

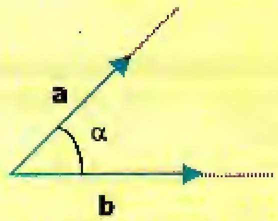


Figura 7.21

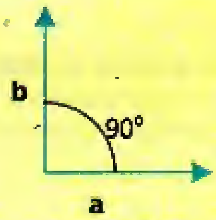


Figura 7.22

Figura 7.23

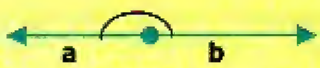


Figura 7.24

Consecuencias de la definición

- Si **a** y **b** son perpendiculares u ortogonales (figura 7.22) su producto escalar es igual a cero, puesto que cos 90° = 0

$$\mathbf{a.b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|.\cos 90^\circ$$
$$\mathbf{a.b} = 0$$

> Si el producto escalar de dos vectores da como resultado cero y ninguno de ellos es el vector nulo, los dos vectores son perpendiculares.

- Si los vectores **a** y **b** tienen la misma dirección y sentido (figura 7.23) se tendrá que $\alpha = 0$ y cos 0° = 1 quedándonos que:

$$\mathbf{a.b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|.\cos 0^\circ$$
$$\mathbf{a.b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|$$

En particular si **a** = **b** $\longrightarrow$ $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a.a}}$

> El módulo de un vector es la raíz cuadrada positivo del producto escalar del vector por sí mismo.

- Si los vectores **a** y **b** tienen la misma dirección y sentidos opuestos (figura 7.24) se tendrá que $\alpha = 180^\circ$ y cos 180° = -1

$$\mathbf{a.b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|.(-1)$$

$$\mathbf{a.b} = -|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|$$

Interpretación geométrica del producto escalar

Observemos en la figura 7.25 la proyección del vector **a** sobre el vector **u** el cual llamaremos **a´**. Esta proyección viene dada por:

| **a´**| = | **a** | . cos α ....(I)

Por definición de producto escalar se tiene que:

a. u = | **a** |.| **u** |. cos α ......(II)

Sustituyendo (II) se tiene que:

a . u = | **a** | | **u** |

***El producto escalar** de dos vectores es igual al producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.*

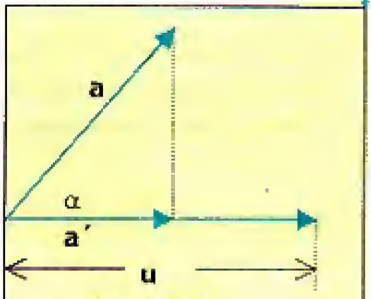


Figura 7.25

7.16 Propiedades del producto escalar

El producto escalar tiene las siguientes propiedades:

- Dado cualquier vector **u**, se cumple:
  u.u ≥ 0; **u.u** = 0 si, y sólo si, **u** = 0
- **Propiedad conmutativa**. El producto escalar es **simétrico.** Para cualquier par de vectores **u** y **v**, se verifica:
  u . v = v . u
- **Propiedad asociativa mixta.** Para cualquier número real α y para todo par de vectores **u,v** se cumple:
  (α**u**) . **v** = **u** . (α**v**) = α(**u.v**)
- **Propiedad distributiva respecto a la adición.** Dados tres vectores **u,v** y **w**, se verifica :
  w(u + v) = w.u + w.v

7.17 El vector unitario

El vector unitario, u es aquel cuyo módulo es igual a 1. Cualquier vector **v** se puede expresar como:

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}|.\mathbf{u}$$

donde **u** es un vector unitario en la dirección y sentido de **v**, y | **v** | es el valor de su módulo.

Por tanto para obtener un vector unitario **u** en la dirección y sentido de un vector dado **v**, basta con dividir el vector entre su módulo.

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{v_1}{|\mathbf{v}|}, \frac{v_2}{|\mathbf{v}|} \right) \text{..........(A)}$$

donde v_1 y v_2 son las componentes del vector **v**

Ejemplo

Dado el vector **v** = (3, 4) determinar un vector unitario en la dirección y sentido de **u.**

El vector **v** viene dado por **v** = (v_1, v_2) = (3, 4)

El módulo de **v** viene dado así:

$$| \mathbf{v} | = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Luego el vector unitario en la misma dirección y sentido de **v** es, de acuerdo con la expresión (A):

$$\mathbf{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$$

7.18 Expresión analítica del producto escalar

Sabemos que cualquier vector del plano puede ser expresado como combinación lineal de los vectores de la base canónica **i, j** .

De esta manera tenemos los vectores **a** = (a_1, a_2) y **b** = (b_1, b_2) podrá escribirse de acuerdo a lo que hemos dicho que: **a** = $a_1.\mathbf{i} + a_2.\mathbf{j}$ y **b** = $b_1.\mathbf{i} + b_2.\mathbf{j}$.

Si multiplicamos escalarmente los vectores **a** y **b** se tendrá que:

$$\begin{aligned} \mathbf{a.b} &= (a_1.\mathbf{i} + a_2.\mathbf{j}) . (b_1.\mathbf{i} + b_2.\mathbf{j}) \\ &= a_1b_1.\mathbf{i.i} + a_1b_2\mathbf{i.j} + a_2b_1\mathbf{j.i} + a_2b_2\mathbf{j.j} \\ &= a_1b_1.1 + a_2b_2.0 + a_2b_1.0 + a_2b_2.1 \\ \mathbf{a.b} &= a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

i. j = j.i = 0 por ser vectores *ortogonales*

i.i = j.j = 1 por ser vectores *unitarios*

Luego nos queda que

$$\boxed{\mathbf{a.b} = a_1b_1 + a_2b_2}$$

La expresión anterior se denomina **expresión analítica** del producto escalar.

Fórmula del ángulo entre dos vectores

Si partimos de la definición de producto escalar tendremos que $\cos \alpha = \dfrac{\mathbf{u} . \mathbf{v}}{| \mathbf{u} |.| \mathbf{v} |}$

Ejemplo 1

Dados los vectores **v** = (3, -2) y **w** = (2, 6) realizar el producto escalar de **v.w**

v.w = (3, -2).(2, 6) = 3.2 + (-2).6 = 6 – 12 = -6

Ejemplo 2

Hallar el ángulo que forman los vectores **v** = (-1, 5) y **w** = (-3, -2)

Para aplicar la fórmula del ángulo entre dos vectores debemos calcular previamente

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (-1).(-3) + 5.(-2) = 3 - 10 = -7$$

Calculemos los módulos de los vectores **v** y **w**

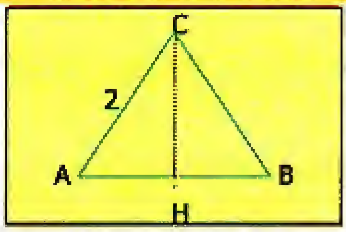
Calculemos $|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$ y $|\mathbf{w}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Sustituyendo en la expresión que nos da el ángulo entre dos vectores se tiene que:

$$\cos\alpha = \frac{-7}{\sqrt{26}.\sqrt{13}} = \frac{-7}{\sqrt{338}} = -0{,}38 \longrightarrow \alpha = -0{,}380749805 \longrightarrow \boxed{\alpha = 112^\circ\, 22'\, 48''}$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Observa la figura de la derecha y calcula el producto escalar de los siguientes vectores:
   a) **CB.CH** b) **AB.HC** **R**: a) 3 b) 0



2. Calcular el producto escalar de los pares de vectores siguientes:

a) $\mathbf{u} = (1-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ $\mathbf{v} = (\sqrt{3}-1, -6)$ b) $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{2}}{3}+1, -\frac{1}{3})$ $\mathbf{v} = (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$

R: a) –4 b) $-\sqrt{2}$

3. Si **a** = (3x –1, 2) y **b** = (7, 2 – x) calcular el valor de x sabiendo que **a . b** = 16
   R: 1

4. Identifica cuáles de los vectores son unitarios. En caso de no serlo, calcular el vector unitario que tiene la misma dirección y sentido.

a) $\mathbf{u} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ b) $\mathbf{v} = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$ c) $\mathbf{w} = (-4, -\sqrt{2})$

R: a) **u** no es vector unitario. Un vector unitario en su misma dirección y sentido es $(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$

b) **v** es un vector unitario.

c) **w** no es un vector unitario. Un vector unitario de su misma dirección y sentido es

$(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$

5. Las componentes de dos vectores son: **u** = (1, 3) y **v** = (-2, 5). Calcular el ángulo que forman dichos vectores. **R:** 40° 14' 11"

6. Calcular los ángulos que forman los siguientes pares de vectores:

a) **v** = (3, -4) y **w** = $\left(\frac{3}{2},-1\right)$ **b)** **v** = (2, 6) y **w** = (-7, 1)

c) **v** = $\left(\frac{\sqrt{3}}{4},-3\right)$ y **w** = $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},-\sqrt{2}\right)$

R: a) 19° 26' 24" **b)** 100° 18' **c)** 30° 7' 12"

7. Determina el valor de z, para que los vectores **u** = (z, -3) y **v** = (1, -2)

a) Sean paralelos
b) Sean perpendiculares
c) Formen un ángulo de • /4 radianes
d) Formen un ángulo de • /3 radianes

R: **a)** z = 3/2 **b)** z = -6 **c)** z = 9 y z = -1 **d)** $z = 24 + 15\sqrt{3}$ y $z = 24 - 15\sqrt{3}$

8. Demuestra que el triángulo con vértices en los puntos A(1, 2), B(6, 5) y C(3, 10) es rectángulo en B. Usa la definición de producto escalar para encontrar el valor de los otros dos ángulos del triángulo. **R:** 45°

9. Encontrar el valor de *b* para que los vectores **u** = (2, -1/2) y **v** = (4, *b*) sean perpendiculares
R: b = 16.

10. Calcula el valor de *m* para que el vector **u** = (1/3, *m*) sea unitario. **R:** $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

11. Hallar el ángulo que forman cada uno de los siguientes pares de vectores:

a) **m** = 3i + 4j y **n** = 12i – 3j
b) **a** = 2i y **b** = 6i + 2j
c) **p** = 2i - 5j y **q** = 11i - 15j
d) **e** = 8i – 5j y **f** = -4i - 3j
e) **g** = 5i + 6j y **h** = 6i - 5j
f) **v** = 4i + 11j y **w** = -4i - 11j

R: a) 67° 9' 59" b) 18° 26' 5" c) 14° 14' 14" d) 111° 7' 30" e) 90° f) 180°

12. Dados los vectores **a** = pi + 4j y **b** = -9i – 7j ¿Qué valor debe tener p para que el producto escalar sea igual a –55. **R:** p = 3

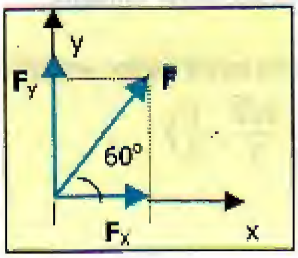
13. Dados los vectores **a = i + j** y **b** = mi + $\frac{3}{2}$ **j** . Hallar el valor de m para que un vector **c** pueda escribirse como **c = 2a – b** sea unitario. **R:** m = 1.

7.19 Aplicaciones de los vectores a la física

Problema 1

Dada una fuerza de magnitud F = 300 Newton que forma un ángulo de 60° con la dirección horizontal, calcular las magnitudes de las componentes de F en la direcciones de los ejes.

En este caso estamos realizando una descomposición de vectores



Vectorialmente puede escribirse que $\mathbf{F} = \mathbf{F_X} + \mathbf{F_Y}$.
Los módulos de los vectores los indicaremos sin negrillas. Diremos que F es el módulo de **F**, que F_x es el módulo de la componente $\mathbf{F_x}$.
Las magnitudes o módulos de las componentes en las direcciones de los ejes vienen dadas por:

En la dirección del eje x	En la dirección del eje y
$F_X = F \cdot \cos 60°$ $F_X = 300\text{ N} \cdot \cos 60°$ $F_X = 150\text{ N}$	$F_Y = F \cdot \text{sen } 60°$ $F_y = 300\text{ N} \cdot \text{sen } 60°$ $F_y = 259{,}8\text{ N}$

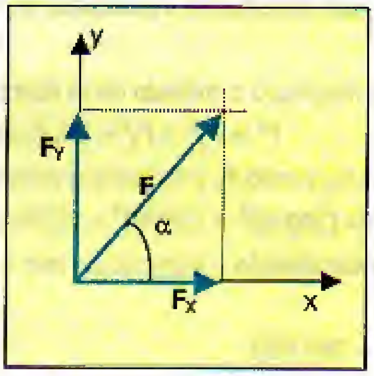
Problema 2

Dadas las magnitudes de las componentes de dos fuerzas que actúan en las direcciones de los ejes, calcular la magnitud de la fuerza resultante.

En este caso tendremos la composición de fuerzas, es decir, la suma vectorial de los vectores componentes $\mathbf{F_x}$ y $\mathbf{F_y}$. Vectorialmente $\mathbf{F} = \mathbf{F_X} + \mathbf{F_Y}$

Las magnitudes de las componentes vienen dadas en módulo así:

$F_x = 25$ N y $F_y = 30$ N.



Los vectores vienen expresados por sus componentes así:

$$\mathbf{F_X} = (25, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{F_y} = (0, 30)$$

La suma de los vectores viene expresada como:

$\mathbf{F} = \mathbf{F_X} + \mathbf{F_y} = (25, 0) + (0, 30) = (25, 30)$

$\mathbf{F} = (25, 30)$

La magnitud de **F** viene dada por $F = \sqrt{25^2 + 30^2} = \sqrt{625 + 900} = \sqrt{1525} = 39{,}05\text{ N}$

La dirección de **F** viene dada por la tangente del ángulo α

$$\text{tag } \alpha = \frac{F_Y}{F_X} = \frac{30\text{N}}{25\text{N}} = 1{,}2 \longrightarrow \alpha = \text{tag}^{-1}\, 1{,}2 \longrightarrow \alpha = 50°\, 11'\, 40''$$

Es posible también determinar la dirección, ángulo entre **F** y $\mathbf{F_X}$, usando el ángulo entre dos vectores dado en la definición de producto escalar.

$\mathbf{F}.\mathbf{F_X} = F.F_X.\cos\alpha$ de donde $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{F}.\mathbf{F_X}}{F.F_X}$.

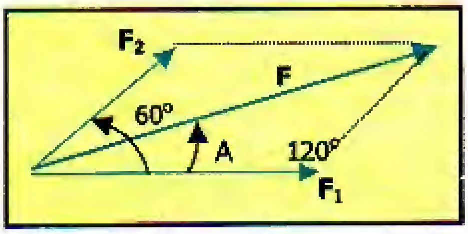
Recordemos que las negrillas son vectores y las no negrillas son módulos.

Sustituyendo nos queda que: $\cos\alpha = \dfrac{(25,30).(25,0)}{39{,}05.25} = \dfrac{25.25 + 30.0}{976{,}25} = \dfrac{625 + 0}{976{,}25} = \dfrac{625}{976{,}25}$

$$\cos\alpha = 0{,}640204865 \qquad \alpha = 50°\, 11'\, 34''$$

Problema 3

Se tienen dos fuerzas cuyas magnitudes vienen dadas por F_1 = 300 Newton y F_2 = 200 Newton, formando entre sí un ángulo de 60°.
Calcular la magnitud de la fuerza resultante **F**.



Por el extremo de $\mathbf{F_1}$ trazamos una paralela a $\mathbf{F_2}$ y, por el extremos de $\mathbf{F_2}$ trazamos una paralela a $\mathbf{F_1}$. El punto de corte es el extremo del vector **F**, cuyo origen coincide con los orígenes de $\mathbf{F_2}$ y $\mathbf{F_1}$.

De esta manera hemos completado un paralelogramo.

F, que es la fuerza resultante, es la suma vectorial de $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$, escribiéndose que:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}.$$

La magnitud o módulo de la fuerza **F** viene dada por la aplicación del teorema del coseno así:

$$F^2 = F_2^2 + F_2^2 - 2F_1.F_2.\cos 60^\circ$$

Sustituyendo F_1 y F_2 por sus magnitudes por sus magnitudes tendremos que:

$$F^2 = (300\ N)^2 + (200N)^2 - 2(300N)(200N).\cos 60^\circ$$

Desarrollando y extrayendo raíz cuadrada se tiene que:

$$F = 264{,}58N$$

El ángulo opuesto a **F** tiene un valor de 120° ya que los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.

La **dirección** de la resultante **F** es el valor del ángulo A, formado entre **F** y $\mathbf{F_1}$, el cual calculamos usando el teorema del seno:

$$\frac{F}{\text{sen}\,120^\circ} = \frac{F_1}{\text{sen}\,A}$$ de donde despejando sen β se tiene que:

$$\text{sen}\,A = \frac{F_1\,\text{sen}\,120^\circ}{F}$$

Sustituyendo por sus valores se tiene que:

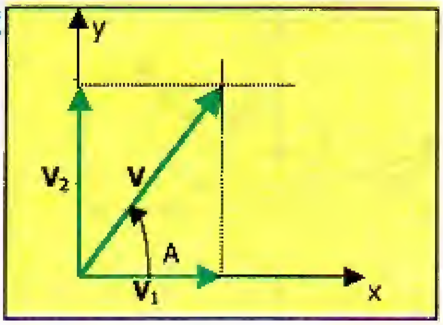
$$\text{sen}\,A = \frac{300N.\text{sen}\,120^\circ}{264{,}58N} = 0{,}981962435$$

Si sen A = 0,981962435 $\longrightarrow$ A = 79° 6' 4"

Problema 4

Una lancha sale de la rivera de un río en la dirección norte con una velocidad de 10 mi/h relativa al agua. Si la velocidad de la corriente es de 4 mi/h hacia el este, calcular la rapidez de la lancha en relación con tierra firme y cuál es su curso.

La figura de la derecha representa las condiciones del problema planteado.



Solución

$\mathbf{V_2}$: representa la velocidad de la lancha relativa al agua. Las componentes de $\mathbf{v_2} = (0, 10)$

$\mathbf{V_1}$: representa la velocidad de la corriente relativa a tierra firme. Luego $\mathbf{V_1} = (4, 0)$.

La resultante de $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ viene dada vectorialmente por $\mathbf{V} = \mathbf{V_1} + \mathbf{V_2}$ la cual es la velocidad de la lancha con relación a tierra firme.

$$\mathbf{V} = \mathbf{V_1} + \mathbf{V_2} = (0, 10) + (4, 0)$$
$$= (4, 10)$$

Luego $\mathbf{V} = (4, 10)$ y su magnitud o módulo viene dado por:

$$\mathbf{V} = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{9 + 100} = \sqrt{109} = 10{,}44$$

El curso o dirección de la lancha viene dado por el ángulo β que forma la velocidad $\mathbf{V}$ con la dirección del vector $\mathbf{V_1}$, calculándose por la tag β:

$$\text{tag } A = \frac{v_y}{v_x} = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

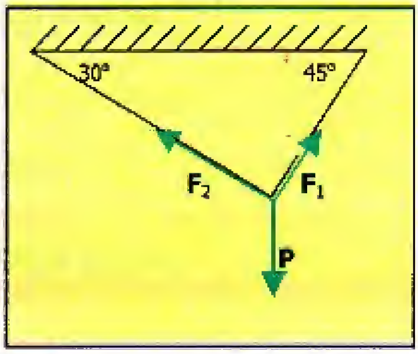
$$\text{Si tag } A = 2{,}5 \longrightarrow A = 68^\circ\ 11'\ 55''$$

Problema 5

Un cuerpo que pesa 500 N está colgado del techo con una cuerda, tal y como lo muestra la figura de la derecha. ¿Cuál es la magnitud de las fuerzas F_1 y F_2 que realiza la cuerda para sostener al cuerpo?.

Solución

Sobre el cuerpo están actuando tres fuerzas: F_1 y F_2 las cuales denominaremos tensiones y el peso **P**, que como se sabe por física, tiene dirección vertical y sentido hacia abajo.

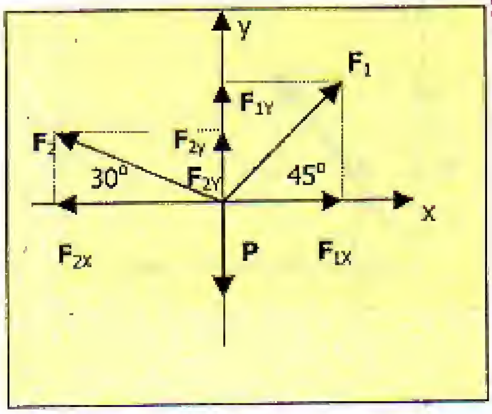


Por la física sabemos que, *si un cuerpo está en equilibrio la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él es igual a cero.*

Por ser la fuerza una magnitud vectorial, deben utilizarse vectores, pudiéndose escribir que:

$$\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{P} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{I})$$

Tratemos de expresar cada vector mediante sus componentes cartesianas, para obtener los módulos de $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$. Para ello definimos un sistema de referencia cartesiano centrado en el cuerpo, tal y como lo muestra la figura de la izquierda.



Las componentes de $\mathbf{F_1}$ en las direcciones de los ejes x e y son: $\mathbf{F_{1X}}$ y $\mathbf{F_{1Y}}$. $\mathbf{F_1 = (F_{1X}, F_{1Y})}$

Las componentes de $\mathbf{F_2}$ en las direcciones de los ejes x e y son: $\mathbf{F_{2X}}$ y $\mathbf{F_{2Y}}$. $\mathbf{F_2 = (F_{2X}, F_{2Y})}$

P sólo tiene componentes en el eje y, que llamaremos $\mathbf{P_Y}$. $\mathbf{P} = (0, -500)$

En módulos se tendrá que:

$F_{1X} = F_1 . \cos 45^\circ$ $F_{1y} = F_1 .\ \text{sen}\ 45^\circ$

$F_{2x} = -F_2 . \cos 30^\circ$ $F_{2y} = F_2 .\ \text{sen}\ 30^\circ$

Las componentes da cada uno de los vectores será:

$\mathbf{F_1} = (F_1 \cos 45^\circ , F_1\ \text{sen}\ 45^\circ)$ (III)

$\mathbf{F_2} = (-F_2 \cos 30^\circ , F_2\ \text{sen}\ 30^\circ)$ (IV)

$\mathbf{P} = (0, -500)$ (V)

Sustituyendo en las expresiones (III), (IV) y (V) en la expresión (I) tendremos que:

$(F_1 \cos 45^\circ , F_1\ \text{sen}\ 45^\circ) + (-F_2 \cos 30^\circ , F_2\ \text{sen}\ 30^\circ) + (0, -500) = (0, 0)$

Sumando las componentes de cada uno de los vectores tendremos que:

$(F_1 \cos 45^\circ - F_2 \cos 30^\circ, F_1\ \text{sen}\ 45^\circ + F_2\ \text{sen}\ 30^\circ - 500) = (0, 0)$

Si igualamos las componentes tendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} F_1 \cos 45^\circ - F_2 \cos 30^\circ = 0 \\ F_1\ \text{sen}\ 45^\circ + F_2\ \text{sen}\ 30^\circ - 500 = 0 \end{cases}$$

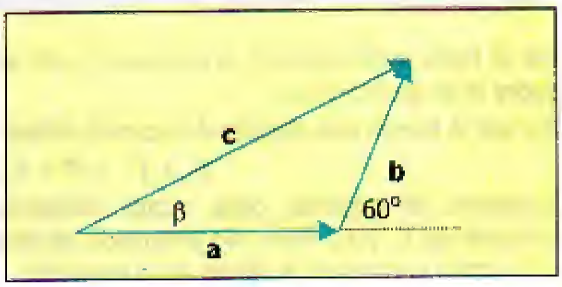
Si resolvemos este sistema de ecuaciones por cualquier método conocido encontraremos los valores siguientes:

$F_1 = 448{,}29$ N y $F_2 = 366{,}03$ N

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Observa el triángulo de la derecha el cual está representando la suma **c** de los vectores **a** y **b**. Si los módulos de **a** y **b** son 200 y 300 respectivamente, calcular el módulo de **c**. Determina el valor del ángulo β

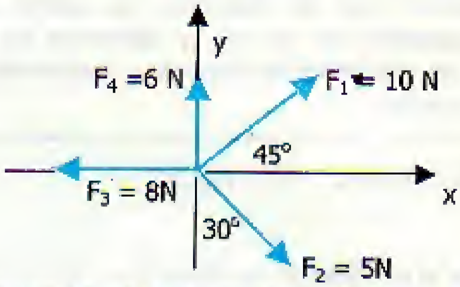
R: c = 435,89 β = 36° 35' 12"



2. Dos fuerzas de magnitudes 200 Kp y 250 Kp forman un ángulo de 60° entre sí estando aplicadas sobre el mismo punto. Calcular: a) la magnitud de la fuerza resultante b) el ángulo que forma la resultante con la fuerza de 200 Kp. **R**: a) 390,5 Kp b) 33° 40' 12"

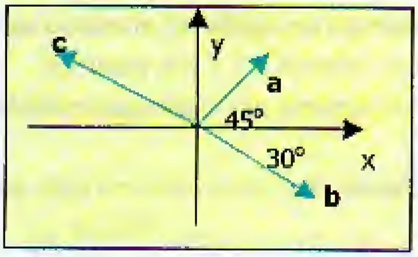
3. Dos fuerzas de 5 Kp y 12 Kp están aplicadas sobre un objeto de modo que sus direcciones formen un ángulo recto. Hallar la magnitud de la resultante y el ángulo que forma con la fuerza menor. **R**: 13 Kp y 67°

4. En la figura se muestran cuatro fuerzas F_1, F_2, F_3 Y F_4 las cuales actúan sobre un objeto. Calcular la magnitud de la fuerza resultante.
R: 8,88 N y 79° 49' 12"



5. Un nadador se desplaza directamente hacia el norte desde la rivera de un río con una velocidad con respecto al agua de 1,5 mi/h. Si la corriente del río fluye hacia el este a una velocidad de 0,8 mi/h, calcular: a) la velocidad del nadador respecto a tierra b) en que dirección viaja el nadador.
R: a) 1,7 mi/h b) 28° 06'

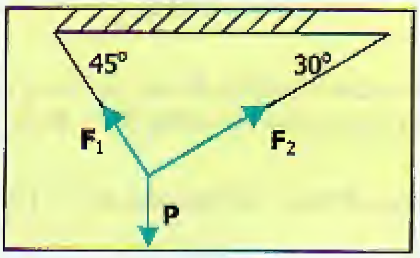
6. En la figura de la derecha se muestran tres vectores cuyas magnitudes son: **a** = 300 **b** = 200 y **c** = 100.
Determina las componentes de cada vector y la magnitud de un vector **d** tal que se cumpla:
d = a + b + c



R: **a** = (212,13 , 212,13) **b** = (173,2 , -100) **c** = (-86,6 , 50) 339,89

7. Cuatro fuerzas de 30, 40, 20 y 50 Newton actúan en el origen. Los ángulos entre las fuerzas son, consecutivamente, 50°. 30° y 60°. Determine la magnitud y dirección de la resultante de las cuatro fuerzas y el ángulo que hace con la fuerza de 30 N
R: 84,6 N y 75° 45'

8. Un cuerpo que pesa 100 kp está colgado del techo con una cuerda, tal y como lo muestra la figura de la derecha. ¿Cuál es la magnitud de las fuerzas F_1 y F_2 que realiza la cuerda para sostener al cuerpo?.

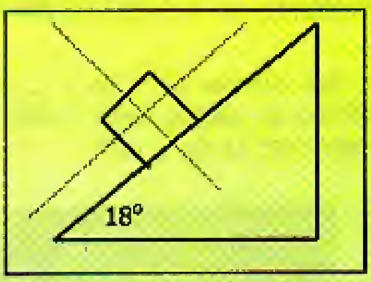


R: 50 Kp y 129,3 Kp

9. Resolver el problema anterior sabiendo que los ángulos superiores miden: el de la izquierda 30°, el de la derecha 60° y el peso de 40 Kp **R**: 29,28 Kp y 23,90 Kp

Actividades complementarias

1. Un bloque cuyo peso es de 200 Newton reposa sobre una rampa inclinada que forma un ángulo de 18° con la horizontal, tal y como lo muestra la figura de la derecha. Haz un diagrama de cuerpo libre donde representes los vectores y determina las magnitudes de las componentes paralela y perpendicular al peso del cuerpo.



R: $P_X = 61{,}8$ N $P_Y = 190{,}2$ N

2. Calcular el extremo de un vector **v** = $(\sqrt{2}, -1)$ sabiendo que su origen es el punto $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 4\right)$.

R: $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 3\right)$.

3. Dados los vectores **u** = (3,2), **v** = $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$, **w** = (4, -6), **z** = (-3/2, -1), **x** = (5, -1)

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?:

a) Los vectores **u** y **v** son paralelos
b) El vector **x** es combinación lineal de **u** y **w**
c) Los vectores **w** y **z** son perpendiculares
d) Los vectores **u** y **z** no son paralelos.

4. Calcular los valores de x e y para que se cumpla la siguiente igualdad:

$\frac{1}{3}(2x, 3y-6) = (-2, 12) - \frac{4}{3}\left(\frac{1-x}{4}, 0\right)$ **R:** x = -7 y = 14

5. Se dan los puntos A(2, 3) y B(5, q). ¿Qué valor debe tener q para que se verifique que el módulo del vector **AB** es igual a 5?. **R:** 7 y –1.

6. El valor de t para que los vectores **a** = (3, -2) y **b** = (4, t) sean perpendiculares es:

a) –6 b) 6 c) 1/6 d) 2/3

7. Los vértices consecutivos de un paralelogramo son P(2, 3), Q(7, 0) y R(3, 8). ¿Cuáles son las componentes del un cuarto vértice S?. **R:** S(-2, 11).

8. El ángulo que forman los vectores **A** = 4 **i** + 2 **j** y **B** = 2 **i** - 4 **j** es:

a) 45° b) 90° c) 180° d) 270°

LOS NÚMEROS COMPLEJOS

8.1 Introducción

Si intentamos resolver la sencilla ecuación $x^2 + 1 = 0$, nos encontraremos que su solución está fuera del alcance de los números reales.

Veamos:

$$x^2 + 1 = 0 \longrightarrow x^2 = -1 \longrightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

No existe un número real que elevado al cuadrado dé -1, ya que todo número real elevado al cuadrado es positivo o cero, nunca es igual a -1. Es decir, no existe $\sqrt{-1}$ como número real.

El problema queda resuelto al definir un número cuyo valor sea $\sqrt{-1}$. Este número se simboliza por la letra i y se denomina **unidad imaginaria.**

$$i = \sqrt{-1}$$

Podemos definir:

Unidad imaginaria, i, es aquel número que elevado al cuadrado es igual a -1. Es decir: $i^2 = -1$

Ejemplo 1 ¿Qué soluciones tiene la ecuación $x^2 + 36 = 0$?

Si $x^2 + 36 = 0 \longrightarrow x^2 = -36 \longrightarrow x = \pm\sqrt{-36} = \pm\sqrt{36}.\sqrt{-1} = \pm 6.i \longrightarrow \begin{cases} x_1 = +6i \\ x_2 = -6i \end{cases}$

Ejemplo 2 Resolver la ecuación $x^2 - 6x + 13 = 0$

Aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado nos queda que:

$$x = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 4.1.13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$$

$$x = 3 \pm 2i \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + 2i \\ x_2 = 3 - 2i \end{cases}$$

Recordemos que el discriminante de una ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si $\Delta < 0$ la solución no es un número real

Las soluciones de una ecuación de segundo grado con discriminante negativo pueden ser del tipo siguiente bi ó a + bi.

Una expresión de la forma a + b i, en la que a y b son números reales cualesquiera e i es la unidad imaginaria, se denomina **número complejo**, pudiéndose escribir:

$$Z = a + bi$$

Esta expresión, Z = a + b i, es llamada **forma binómica** o **rectangular** del numero complejo: donde el número a representa la **parte real** y el número b representa la **parte imaginaria**.

Parte imaginaria

Parte real → a + b i

Unidad imaginaria

Son números complejos: $Z_1 = 3 - 5i$ $Z_2 = 4 - 2i$ $Z_3 = -5$ $Z_4 = -3i$ $Z_5 = -2 + 4i$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Calcula las raíces cuadradas de los siguientes números:

a) $\sqrt{-81}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{-\frac{1}{4}}$ d) $\sqrt{-\frac{1}{2}}$ e) $\sqrt{-\frac{9}{16}}$ f) $\sqrt{-7}$ g) $\sqrt{-18}$

R: a) 9i b) 5i c) $\frac{1}{2}i$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}i$ e) $\frac{3}{4}i$ f) $\sqrt{7}\,i$ g) $3\sqrt{2}\,i$

2. Resolver en el conjunto de los números complejos las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 16 = 0$ b) $x^2 + 8x + 25 = 0$ c) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ d) $x^2 - 2x + 5 = 0$

R: a) $x_1 = +4i$ $x_2 = -4i$ b) $x_1 = -4+3i$ $x_2 = -4 - 3i$ c) $x_1 = 2$ $x_2 = -2$ $x_3 = i$ $x_4 = -i$
d) $x_1 = 1 + 2i$ $x_2 = 1 - 2i$

3. Expresar en forma binómica el número complejo resultado de las siguientes operaciones:

a) $1 + \sqrt{-16}$ b) $6 - 8\sqrt{-4}$ c) $\sqrt{24} + 5\sqrt{-27}$ d) $\sqrt{20} + \sqrt{-18}$ e) $\sqrt{50} - \sqrt{-\frac{1}{4}}$

f) $\frac{-4 \pm \sqrt{4}.\sqrt{-1}}{2}$ g) $\frac{\sqrt{8}}{6} - \sqrt{-\frac{1}{4}}$ h) $-2 - \sqrt{-16}$ i) $54 + \sqrt{-162}$ j) $\sqrt{-27} + \sqrt{-75}$

R: a) 1 + 4i b) 6 – 16i c) $2\sqrt{6} + 15\sqrt{3}\,i$ d) $2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}\,i$ e) $5\sqrt{2} - \frac{1}{2}i$

f) $x_1 = -2 - i$ $x_2 = -2 + i$ g) $\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}i$ h) –2 – 4i i) $54 + 9\sqrt{2}\,i$ j) $14\sqrt{3}\,i$

8.2 Potencias de la unidad imaginaria

Observemos con detenimiento las siguientes potencias, desde i^0 hasta i^8:

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2.i = (-1).\,i = -i$
$i^4 = i^2 \,.\, i^2 = (-1).(-1) = 1$

$i^5 = i^4 \,.\, i = 1 \,.\, i = i$
$i^6 = i^4 \,.\, i^2 = 1 \,.\, (-1) = -1$
$i^7 = i^6 \,.\, i = (-1).\, i = -i$
$i^8 = i^6 \,.\, i^2 = (-1) \,.\, (-1) = 1$

Se observa, que los valores de las potencias de i se repiten periódicamente al aumentar el exponente en 4.

Las cuatro primeras potencias de i son diferentes. Cada cuatro potencias sucesivas se repiten los valores 1, i, -1, -i,

$i^4 = i^8 = i^{12} = \ldots\ldots\ldots\ldots = i^{\text{múltiplo de } 4} = 1$ y usando este proceso es fácil encontrar las potencias de i

$i^{45} = i^{44} \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^{3603} = i^{3600} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

En general, para obtener una potencia de i, se divide el exponente de i entre 4 y usamos como nuevo exponente el resto de la división.

$i^{46} = i^2 = -1$

$i^{1236} = i^0 = 1$

$i^{178} = i^2 = -1$

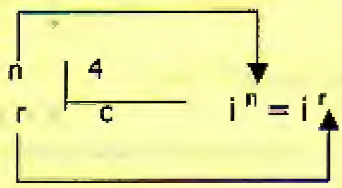
$i^{3245} = i$

$i^{126} = i^2 = -1$

$i^{503} = i^3 = i^2.i = -1.i = -i$

$$\begin{array}{r|l} 46 & 4 \\ \hline 06 & 11 \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3245 & 4 \\ \hline 04 & 811 \\ 05 & \\ 1 & \end{array}$$

Cálculo de i^n aplicando la regla



Ejemplos

Calcular en cada caso el valor del número imaginario

a) $i^{126} = i^2 = -1$

b) $(-i)^{65} = (-1 \cdot i)^{65} = (-1)^{65} \cdot i^{65} = (-1) \cdot i^{64} \cdot i = (-1) \cdot 1 \cdot i = -i$

c) $i^{1603} = i^{1600}.i^3 = 1.i^2.i = 1.(-1).i = -i$

d) $i^{-5203} = \dfrac{1}{i^{5203}} = \dfrac{1}{i^3} = \dfrac{1}{i^2.i} = \dfrac{1}{(-1).i} = \dfrac{1}{-i}$

8.3 Números imaginarios y números reales

El número complejo 0 + 5 i tiene parte real igual a cero. Por esta razón, escribimos simplemente 5i.

Los números complejos cuya parte real es cero se llaman **números imaginarios puros.**

Por otro lado, el número complejo 5 + 0i tiene la parte imaginaria igual a cero. En este caso simplemente escribimos 5.

Los números complejos cuya parte imaginaria es cero se llaman **números reales**

Esto último justifica que los números reales sean considerados como un *subconjunto de los números complejos C*, pudiéndose decir:

Los números reales son los números complejos cuya parte imaginaria es igual a cero.

8.4 Igualdad de números complejos

Dos números complejos son iguales sí, y solamente sí, tienen **iguales** sus partes reales e imaginarias

Si $\mathbf{Z_1} = a + bi$ y $\mathbf{Z_2} = c + di$ son dos números complejos, puede escribirse de acuerdo a la definición que:

$$\mathbf{Z_1} = \mathbf{Z_2} \Longleftrightarrow a = c \text{ y } b = d$$

Ejemplo 1

¿Cuál debe ser el valor de k para que el número complejo $3 + (\sqrt{3k} + 1)i$ sea un número real?.

Solución

De acuerdo con la definición, para que un complejo sea un número real debe verificarse que la parte imaginaria; que en este caso es $\sqrt{3k} + 1$, sea igual a cero.

$$\sqrt{3k} + 1 = 0 \longrightarrow \sqrt{3k} = -1 \longrightarrow (\sqrt{3k})^2 = (-1)^2 \longrightarrow 3k = 1$$

Despejando k se tiene que:

$$K = 1/3$$

Ejemplo 2

Dados dos números complejos $\mathbf{Z_1} = 2 + (m + 4)i$ y $\mathbf{Z_2} = (n - 3) + 2i$, hallar el valor de m y n para que $\mathbf{Z_1} = \mathbf{Z_2}$

Solución

Por definición, para que dos números complejos sea iguales, debe cumplirse que sus partes reales y sus partes imaginarias sean iguales.

Si $Z_1 = Z_2 \longrightarrow 2 + (m + 4)i = (n - 3) + 2i \longrightarrow n - 3 = 2$ y $m + 4 = 2$

De la primera se tiene que $n - 3 = 2 \longrightarrow n = 5$

De la segunda se tiene que $m + 4 = 2 \longrightarrow m = -2$

8.5 Opuesto y conjugado de un complejo

Si establecemos una comparación entre los números complejos $2 + 5i$ y $-2 - 5i$ notaremos que sus partes reales (2 y −2) y sus partes imaginarias (5 y − 5) son opuestas.

Se llama **opuesto** de un número complejo $\mathbf{Z} = a + bi$ al número $-\mathbf{Z} = -a - bi$

Por otra parte, al comparar los números complejos $5 + 7i$ y $5 - 7i$, observamos que sus partes reales (5 y 5) son iguales y sus partes imaginarias (7 y −7) son opuestas. Estos complejos se dice que son conjugados.

Se llama **conjugado** de un número complejo $\mathbf{Z} = a + bi$ al número complejo $\bar{\mathbf{z}} = a - bi$

Ejemplos

Número complejo	Opuesto	Conjugado
$Z = 2 - 5i$	$-Z = -2 + 5i$	$\overline{Z} = 2 + 5i$
$Z = -3 + 7i$	$-Z = 3 - 7i$	$\overline{Z} = -3 - 7i$
$Z = -4 - 3i$	$-Z = 4 + 3i$	$\overline{Z} = -4 + 3i$
$Z = 5 - 8i$	$Z = -5 + 8i$	$\overline{Z} = 5 + 8i$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Encontrar el valor de cada una de las siguientes potencias:

a) i^{23} **b)** i^{78} **c)** i^{329} **d)** i^{1224} **e)** i^{3727} **f)** $(-i)^{71}$ **g)** $(-i)^{127}$ **h)** $(-\sqrt{2}\,i)^{20}$

R: a) $-i$ b) -1 c) i d) -1 e) $-i$ f) i g) i h) 1024

2. Encuentre el valor de k para que los números complejos $Z_1 = 2 + 5i$ $Z_2 = 2 + (1 + K)i$ sean iguales. **R:** $k = 4$

3. Hallar el valor de p para que los números complejos $Z_1 = 3 + 5i$ y $Z_2 = 3 + (p - 2)\,i$ sean iguales. **R:** $p = 7$

4. Hallar en cada caso el valor de k para que los siguientes números complejos sean números reales.

a) $(k + 1)\,i - 6$ b) $\frac{k}{10} + \frac{3k}{4}i$ c) $10 - k\,i - 2i$

R: a) $k = -1$ b) $k = 0$ c) $k = -2$

5. Calcular el valor de p y q para que los números complejos $Z_1 = 2p + qi$ y $Z_2 = -5 + 3i$ sean:

a) Opuestos b) Conjugados

R: a) $p = 5/2$ y $q = -3$ b) $p = -5/2$ y $q = -3$

6. ¿Qué valor debe tener "m" si sabemos que el complejo $(m + \frac{1}{2}) - \frac{1}{7}i$ es imaginario puro?

R: $m = -1/2$

7. Dados los números complejos $Z_1 = (1 + m) + (\frac{1}{2} + n)i$ y $Z_2 = (3 + 4m) + (2 + n)i$, ¿qué valor deben tener m y n para que Z_1 sea igual al conjugado de Z_2?

R: $m = -2/3$ y $n = -5/4$

8. Dados dos números complejos $Z_1 = 2 + (a + 4)i$ y $Z_2 = (b - 3) + 2i$, hallar los valores de a y b para que se cumpla que $Z_1 = Z_2$

R: $a = 5$ $b = -2$.

9. Calcular el valor de $Z = Z_1 + Z_2$ sabiendo que:

$Z_1 = 2\,i^{1942} + 5\,i^{821} - 3\,i^{2225} - 2\,i^{59} + 3\,i^{1003} - 5\,i$

$Z_2 = 3\,i^{61} - 5\,i^{223} - 2\,i^{367} + 8\,i^{334} + 8 + 2\,i^{285}$

R: $-2 + 8\,i$

8.6 Representación gráfica de los números complejos

Como sabemos, un número real se representa por un punto situado sobre una recta llamada *recta real*.

Los número complejos no tienen cabida en la recta real, ya que todos los puntos de la recta tienen asignado un número real. Es ésta, la principal razón por la cual los números complejos son representados por un punto en un plano infinito llamado **plano complejo**.

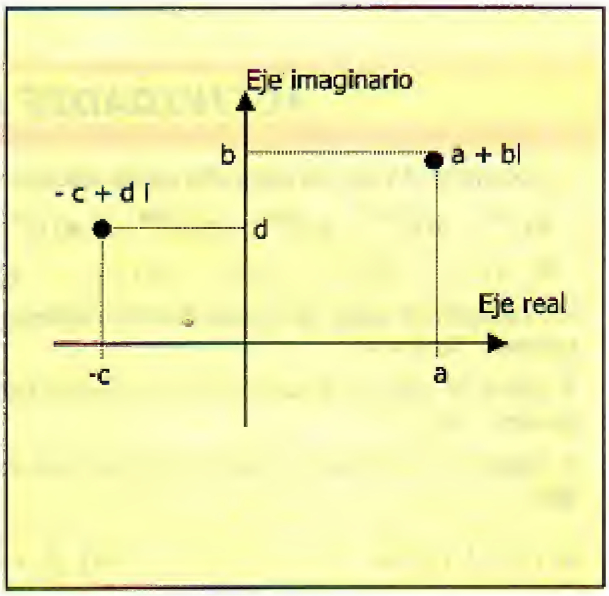
La parte real se representa en el eje de abscisas, llamado en este caso **eje real** y la parte imaginaria en el eje de ordenadas, llamado **eje imaginario**.

Cada punto del plano es la representación gráfica de un número complejo, que en este caso es a + bi, el cual está representado por el punto de coordenadas (a, b). Este punto recibe el nombre de **afijo** de dicho número complejo.

El conjunto de todos los afijos del plano constituye el **plano complejo**.

La parte real se representa sobre el eje de las abscisas llamado, en este caso, **eje real** y la parte imaginaria en el eje de ordenadas, llamado **eje imaginario**.

A cada número complejo le corresponde su afijo en el plano, y a cada punto del plano complejo le corresponde un número complejo.



Si b = 0, el número real a + bi se identifica con el número real a y se representa en el eje de abscisas o eje real. Decimos, que los números que son reales tienen su **afijo** en el eje de abscisas.

Si a = 0, el número complejo a + bi tiene únicamente parte imaginaria, recibiendo en este caso el nombre de imaginario puro. Decimos, que los números que son imaginarios tienen su **afijo** sobre el eje de ordenadas.

Si a = 0 y b = 0, el número complejo a + bi recibe el nombre de **número complejo cero.** Se representa en el origen de coordenadas.

Representación de números complejos opuestos

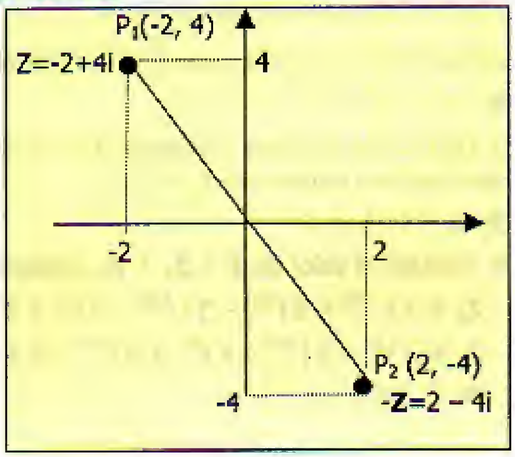
Consideremos dos números complejos opuestos **Z** = -2 + 4i y **-Z** = 2 - 4i. Sus afijos correspondientes son: $P_1 = (-2, 4)$ y $P_2 = (2, -4)$.

En la figura hemos representado en el plano complejo estos afijos.

Como puede notarse, P_1 y P_2 son simétricos respecto al origen de coordenadas.

Podemos decir que:

Los **afijos** de dos números complejos opuestos, **Z y -Z,** son simétricos respecto al **origen de coordenadas.**



Representación de números complejos conjugados

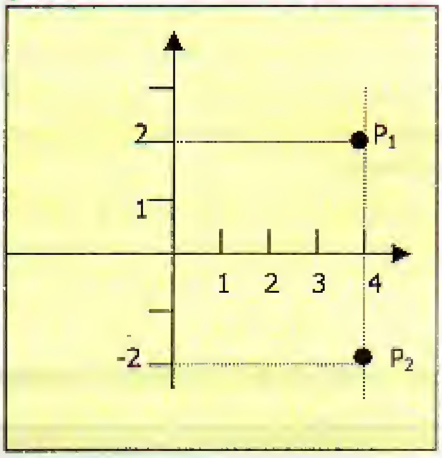
Consideremos los números complejos conjugados siguientes: $z = 4 + 2i$ y $\bar{z} = 4 - 2i$

Sus afijos son los puntos $P_1=(4, 2)$ y $P_2=(4, -2)$ respectivamente.

Estos afijos, P_1 y P_2, que han sido representados en la figura de la derecha son simétricos respecto al eje real.

Podemos decir que:

Los **afijos** correspondientes a dos números complejos **conjugados**, z y $\bar{z}$, son **simétricos** respecto al **eje real.**



ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Representa en el plano complejo los afijos de los siguientes números:

a) $z_1 = -i$ **b)** $z_2 = 3$ **c)** $z_3 = 2 + 1/2\ i$ **d)** $z_4 = -2 + 3i$ **e)** $z_5 = 5 - i$ **f)** $-3 - 5i$

2. Se dan los siguientes afijos: $P_1 = (3, 4)$ $P_2 = (2, -5)$ $P_3 = (4, -2)$ $P_4 = (-2, -5)$

a) Represéntalos en el plano complejo **b)** Escribe los números complejos correspondientes en forma binómica.

3. Represента gráficamente los afijos de los siguientes números complejos y los de sus respectivos opuestos:

a) $z_1 = -4 + i$ **b)** $z_2 = \frac{3}{2}$ **c)** $z_3 = -3i$ **d)** $z_4 = -4 - 3i$ **e)** $z_5 = 4 - 2i$ **f)** $z_6 = -i$

4. Representa gráficamente los afijos de los siguientes números complejos y los de sus respectivos conjugados:

a) $z_1 = 2i$ **b)** $z_2 = -3i$ **c)** $z_3 = -5$ **d)** $z_4 = -2 - i$ **e)** $z_5 = 4 - 5i$ **f)** $z_6 = -4 + 5i$

8.7 Operaciones con números complejos en forma binómica

Adición de números complejos

Dados los números complejos $\mathbf{Z}_1 = a + bi$ y $\mathbf{Z}_2 = c + di$ la suma queda definida así:

$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

La suma de dos números complejos en forma binómica, $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_1$ da como resultado otro número complejo cuya parte real es igual a la suma algebraica de las partes reales de los sumandos y cuya parte imaginaria es igual a la suma algebraica de las partes imaginarias

Ejemplos

1. $(5-2i)+(-3+5i)=(5-3)+(-2i+5i)=2+3i$
2. $(-7+5i)+(4-3i)=(-7+4)+(5i-3i)=-3+2i$
3. $(-2+4i)-(5-2i)=(-2+4i)+(-5+2i)=(-2-5)+(4i+2i)=-7+6i$

Nótese, que la resta no es más que la suma del complejo minuendo con el opuesto del complejo sustraendo.

4. $(-8-3i)-(-2+i)+(3-5i)=(-8-3i)+(2-i)+(3-5i)$

$$=(-8+2+3)+(-3i-i-5i)$$
$$=-3-9i$$

Propiedad de los complejos conjugados

La suma de dos números complejos conjugados $a+bi$ y $a-bi$, es un número real

$$(a+bi)+(a-bi)=2a$$

$(2+3i)+(2-3i)=4$

$(-5-4i)+(-5+4i)=-10$

$(-7+2i)+(-7-2i)=-14$

$(x+yi)+(x-yi)=2x$

$(m+ni)+(m-ni)=2m$

$(k+ni)+(k-ni)=2k$

Producto de dos números complejos

Dados los números complejos $\mathbf{Z_1}=a+bi$ y $\mathbf{Z_2}=c+di$ evaluemos el producto $\mathbf{Z_1}\,.\,\mathbf{Z_2}$ aplicando la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} Z_1\,.\,Z_2 &= (a+bi)\,.\,(c+di) \\ &= ac+adi+bci+bd\,i^2 \\ &= ac+adi+bci+bd\,(-1) \quad (\text{ porque } i^2=-1) \\ &= ac+adi+bci-bd \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i \end{aligned}$$

$$\boxed{Z_1\,.\,Z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i}$$

Ejemplos

1. $(2+4i)\,.\,(3+5i)=(2.3-4.5)+(2.5+4.3)i$

$$=(6-20)+(10+12)i$$
$$=-14+22i$$

2. $(3-2i)\,.\,(6+7i)=(3.6-(-2).7)+(3.7+(-2).6)i$

$$=(18+14)+(21-12)i$$
$$=32+9i$$

3. $(5 + 3i) . (-3 - 2i) = (-15 + 6) + (-10 - 9) i$
$= -9 - 19 i$

Propiedad de los números complejos

El producto de dos números complejos conjugados a + bi y a – bi, es un número real

$$(a + bi) . (a - bi) = a^2 + b^2$$

$(2 + 3i) . (2 - 3i) = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

$(-5 - 4i) . (-5 + 4i) = (-5)^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$

$(-7 + 2i) . (-7 - 2i) = (-7)^2 + 2^2 = 49 + 4 = 53$

$(m - ni) . (m + ni) = m^2 + n^2$

$(x + y i) . (x - y i) = x^2 + y^2$

$(p + q i) . (p - q i) = p^2 + q^2$

Cociente de dos números complejos

Sean dos números complejos $\mathbf{Z_1} = a + bi$ y $\mathbf{Z_2} = c + di$.

Para dividirlos se multiplica el numerador y el denominador por la conjugada del denominador

Evaluemos

$$\frac{\mathbf{Z_1}}{\mathbf{Z_2}} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

El resultado es también un número complejo que tiene como parte real $\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$ y cuya parte imaginaria es $\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$

El **inverso** de un número complejo, a + b i , puede ser calculado utilizando el procedimiento empleado para calcular el cociente de dos números complejos.

Ejemplos

Ejemplo 1 Evaluar el cociente $\dfrac{3-2i}{6+7i}$

$$\frac{3-2i}{6+7i} = \frac{(3-2i).(6-7i)}{(6+7i)(6-7i)} = \frac{18-14+(-12-21)i}{36+49} = \frac{4-33i}{85} = \frac{4}{85} - \frac{33}{85}i$$

Ejemplo 2 Calcular el inverso de 3 – 2 i

$$\frac{1}{3-2i}=\frac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{3+2i}{9+4}=\frac{3+2i}{13}=\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$$

Ejemplo 3

Dados números complejos $Z_1 = 2-3i$; $Z_2 = -5+8i$; $Z_3 = 3-2i$; $Z_4 = 2-5i$ calcular las siguientes expresiones:

a) $Z=\frac{Z_1+Z_2-Z_1}{Z_4}$ b) $Z=\frac{Z_1^2}{Z_2}$ c) $Z=\frac{Z_1}{Z_2}+\frac{Z_2.Z_3}{Z_1}$

Solución

a) $$Z=\frac{Z_1+Z_2-Z_1}{Z_4}=\frac{(2-3i)+(-5+8i)-(3-2i)}{2-5i}=\frac{(2-5-3)+(-3+8+2)i}{2-5i}=\frac{-6+7i}{2-5i}$$

$$Z=\frac{(-6+7i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}=\frac{(-12-35)+(14-30)i}{4+25}=\frac{47-16i}{29}=\frac{47}{29}-\frac{16}{29}i$$

$$\boxed{Z=\frac{47}{20}-\frac{16}{29}i}$$

b) $Z=\frac{Z_1^2}{Z_2}$

$$\frac{(2-3i)^2}{(-5+8i)}=\frac{4+12i+(3i)^2}{-5+8i}=\frac{4-12i+9i^2}{-5+8i}=\frac{4-12i-9}{-5+8i}=\frac{-5-12i}{-5+8i}=\frac{(-5-12i)(-5-8i)}{(-5+8i)(-5-8i)}$$

$$Z=\frac{(25+96)+(40+60)i}{25+64}=\frac{121+100i}{89}=\frac{121}{89}+\frac{100}{89}i$$

$$\boxed{Z=\frac{121}{89}+\frac{100}{89}i}$$

c) $Z = \frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2 . Z_3}{Z_1}$

Solución

Primero evaluamos la expresión $\frac{Z_1}{Z_2}$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(2-3i)}{(-5+8i)} = \frac{(2-3i)(-5-8i)}{(-5+8i)(-5-8i)} = \frac{(-10-24)+(15-16)i}{25+64} = \frac{-34-i}{89} = -\frac{34}{89} - \frac{1}{89}i$$

$$\boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{34}{89} - \frac{1}{89}i} \quad ....(A)$$

Evaluemos ahora $\frac{Z_2 . Z_3}{Z_1}$

$$\frac{Z_2 . Z_3}{Z_1} = \frac{(-5+8i).3-2i)}{2-3i} = \frac{(-15+16)+(24+10)i}{2-3i} = \frac{1+34i}{2-3i}$$

$$\frac{Z_2 . Z_3}{Z_1} = \frac{(1+34i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{(2-102)+(68+3)i}{4+9} = \frac{-100+71i}{13}$$

$$\boxed{\frac{Z_2 . Z_3}{Z_1} = -\frac{100}{13} + \frac{71}{13}i} \quad ....(B)$$

Sustituyendo (A) y (B) en la expresión $Z = \frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2 . Z_3}{Z_1}$ nos queda que:

$$Z = \left(-\frac{34}{89} - \frac{1}{89}i\right) + \left(-\frac{100}{13} + \frac{71}{13}i\right)$$

$$\boxed{Z = -\frac{9342}{1157} + \frac{6306}{1157}i}$$

Ejemplo 4

¿Qué valores deben tener m y n para que se cumpla la siguiente igualdad?

$(m + 3i).(n - 5i) = 25 + 19i$

Solución

$(mn + 15) + (3n - 5m)i = 25 + 19i$ (evaluando el producto en el primer miembro)

Si aplicamos la definición de igualdad de complejos (dos complejos son iguales si tienen igual su parte real y su parte imaginaria) puede escribirse que:

$$mn + 15 = 25 \quad y \quad 3n - 5m = 19$$

De $mn + 15 = 25 \longrightarrow mn = 25 - 15 \longrightarrow mn = 10$

Nos queda un sistema de ecuaciones formado así:

$$\begin{cases} mn = 10 \text{ ....(A)} \\ 3n - 5m = 19 \text{ ....(B)} \end{cases} \longleftarrow$$

Este es un sistema de ecuaciones que resolveremos por el método de sustitución

De la ecuación (B) intentemos despejar n

$$3n = 19 + 5m \longrightarrow n = \frac{19 + 5m}{3} \text{ ....(C)}$$

Sustituyendo este valor de n en (A) se tiene que:

$$m\left(\frac{19 + 5m}{3}\right) = 10 \longrightarrow 19m + 5m^2 = 75 \longrightarrow 5m^2 + 19m - 75 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se tendrá que:

$$m = \frac{-19 \pm \sqrt{361 + 600}}{10} = \frac{-19 \pm \sqrt{961}}{10} = \frac{-19 \pm 31}{10}$$

$$m = \frac{-19 \pm 31}{10} \longrightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{-19 + 31}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \longrightarrow m_1 = 6/5 \\ m_2 = \frac{-19 - 31}{10} = \frac{-50}{10} = -5 \longrightarrow m_2 = -5 \end{cases}$$

Sustituyendo $m_2 = 5$ en la expresión (C) tendremos que:

$$n = \frac{19 + 5.(-5)}{3} = \frac{19 - 25}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

Luego $m = -5$ y $n = -2$

También se cumple que si $m = 6/5$ se tiene que $n = 25/3$. **Verifícalo**

Ejemplo 5

La suma de dos números complejos Z_1 y Z_2 es igual a 1 + 4 i y el cociente es el número imaginario puro i. Hallar los complejos.

Solución

Llamemos a los complejos buscados $Z_1 = a + b\,i$ y $Z_2 = c + d\,i$

De acuerdo con las condiciones del problema deben verificarse dos cosas:

$Z_1 + Z_2 = 1 + 2\,i$ .... (A) y $\dfrac{Z_1}{Z_2} = i$ ....(B)

Por la primera condición podemos escribir que

$$(a + b\,i) + (c + d\,i) = 1 + 2\,i$$

$(a + c) + (b + d)\,i = 1 + 2\,i$ (aplicando la definición de suma de complejos)

Aplicando la igualdad de complejos escribimos que: $\boxed{a + c = 1 \quad y \quad b + d = 2}$ ....(C)

Por la segunda condición podemos escribir que:

$$\frac{a+bi}{c+di} = i \longrightarrow a + b\,i = (c + d\,i)\,i \longrightarrow a + b\,i = c\,i - d \longrightarrow (a + d)\ (b - c)\,i = 0$$

Luego

$\boxed{a + d = 0 \quad y \quad b - c = 0}$ ....(D)

De (C) y (D) se tiene que:

$a + c = 1$........(I)
$b + d = 2$.......(II)
$a + d = 0$ .....(III)
$b - c = 0$ ....(IV)

Este es un sistema de 4 ecuaciones que debemos resolver.

Observemos el cuadro

De (III) se deduce que $a = -d$ de donde $d = -a$

De (IV) se deduce que $b = c$

Sustituyendo b y d por por sus valores en (II) tenemos que:

$c - a = 2$

Formamos el sistema $\begin{cases} a + c = 1 \\ c - a = 2 \end{cases}$

Al resolverlo obtenemos que $a = -3/2$ $c = 5/2$.

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (III) y (IV) se obtiene que $d = 1/2$ y $b = 3/2$.

Los números complejos buscados serían : $Z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$ y $Z_2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i$

Ejemplo 6

Hallar dos números complejos Z_1 y Z_2 tales que su suma sea 5 + 5 i; su cociente imaginario puro y la parte real de Z_2 sea igual a 3.

Solución

Primera parte

Sean los complejos expresados de la manera siguiente: $Z_1 = a + b\,i$ y $Z_2 = c + d\,i$. Como la parte real de Z_2 es igual a 3 se tendrá que $Z_1 = a + b\,i$ y $Z_2 = 3 + d\,i$

De acuerdo con una condición del enunciado debe cumplirse que

$(a + b\,i) + (3 + d\,i) = 5 + 5\,i$

Sumando los complejos del primer miembro queda:

$(a + 3) + (b + d)\,i = 5 + 5\,i$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias se tiene que

$a + 3 = 5$

$a = 2$ ....(I)

$b = 5 - d$ ....(II)

Segunda parte

Debemos evaluar el cociente entre Z_1 y Z_2

$$\frac{a+b\,i}{3+d\,i} = \frac{(a+bi)(3-di)}{(3+di)(3-di)}$$

$$\frac{(3a+bd)+(3b+ad)i}{9+d^2} = \frac{3a+bd}{9+d^2} + \frac{3b+ad}{9+d^2}i$$

Como el cociente debe ser un imaginario puro, debe cumplirse que la parte real sea igual a cero.

$$\frac{3a+bd}{9^2+d^2} = 0$$

$3a + bd = 0$ ....(III)

Sustituyendo (I) y (II) en (III) se tiene que: $3.2 + (5 - d)d = 0 \rightarrow 6 + 5\,d - d^2 = 0$

Si multiplicamos por (-1) y ordenamos se tiene que:

$$d^2 - 5\,d - 6 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado por factorización tendremos que:

$$(d - 6)(d + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} d_1 = 6 \\ d_2 = -1 \end{cases}$$

Si $d_1 = 6$ y $b = 5 - d \rightarrow b_1 = 5 - 6 \rightarrow b_1 = -1$

Si $d_2 = -1$ y $b = 5 - d \rightarrow b_2 = 5 + 1 \rightarrow b_2 = 6$

Con estos valores obtenidos podemos escribir los complejos pedidos:

$\boxed{Z_1 = 2 - i \qquad Z_2 = 3 + 6\,i}$

$\boxed{Z_1 = 2 + 6\,i \qquad Z_2 = 3 - i}$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Se dan los siguientes complejos: $Z_1 = 3 - 2\,i$ $Z_2 = 4 + i$ calcular:

a) $Z_1 + Z_2$ b) $Z_1.Z_2$ c) $Z_1/\,Z_2$ d) $\dfrac{1}{Z_1}$ e) $\dfrac{1}{Z_2}$ f) $\overline{Z}_1.Z_2$ g) $\dfrac{Z_1}{Z_2}+\dfrac{1}{Z_2}$

R: a) $7 - i$ b) $14 - 5\,i$ c) $\dfrac{10}{17}-\dfrac{11}{17}i$ d) $\dfrac{3}{13}+\dfrac{2}{13}i$ e) $\dfrac{4}{17}-\dfrac{1}{17}i$ f) $10 + 11\,I$ g) $\dfrac{14}{17}-\dfrac{12}{17}i$

2. Evaluar $[(3 - 2\,i).(3 + i) - (1 - 2\,i)(1 + 2\,i)]\,(5 + 4\,i)$ **R**: $42 + 9\,i$

3. Dados $Z_1 = \dfrac{1}{2}+2\,i$; $Z_2 = 3+\dfrac{1}{2}i$; $Z_3 = -2 + 4\,i$; $Z_4 = 3\,i$; $Z_5 = -3+\dfrac{1}{4}i$

Calcular: a) $Z_1 + Z_2 - Z_3$ b) $Z_3 - Z_2 + Z_1$ c) $\dfrac{3Z_3}{Z_2}+5.\dfrac{Z_5}{Z_4}$

R: a) $\dfrac{11}{2}-\dfrac{3}{2}i$ b) $-\dfrac{9}{2}+\dfrac{11}{2}i$ c) $\dfrac{545}{444}+\dfrac{254}{37}i$

4. Efectuar las operaciones y expresar el resultado en la forma $a + b\,i$

a) $(3+2\sqrt{-3})(2-3\sqrt{-2})$ b) $(-3-3\sqrt{-3})^2$ c) $(3-\sqrt{-12}).(2+\sqrt{-75})$ d) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}$

e) $(\sqrt{3}-2\,i)^2+(2\sqrt{3}-5\,i).(1-2\,i)$ f) $(i + 2)^2 + \dfrac{1+i}{1-i}$

R: a) $-24 + 5\sqrt{3}\,i$ b) $-18 + 18\sqrt{3}\,i$ c) $36 + 11\sqrt{3}\,i$ d) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{2\sqrt{6}}{5}i$

e) $(-11+2\sqrt{3})+(-8\sqrt{3}-5)\,i$ f) $3\,i$

5. Hallar el valor de p si se cumple que $(p + 5\,i) + (3 + i) = (1 + 5\,i) + (-p + i)$
R: $p = -1$

6. Hallar el número k que verifica la siguiente igualdad: $(1 + 3\,i).(k + 2\,i) = 13 + 59\,i$
R: $k = 19$

7. Calcular y expresar el resultado en forma binómica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{(4+i)^2-(4-i)^2}{(4+i)^2+(4-i)^2}$ **R**: $\dfrac{8}{15}i$ b) $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}-i\sqrt{b}}$ **R**: $\sqrt{a}+i\sqrt{b}$

8. Calcular el valor de k para que el número complejo $\left(\dfrac{4-ki}{3+i}\right).\,i^{563}$ sea imaginario puro.

R: $k = 12$

9. Calcula la expresión $\dfrac{1-3i}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}$ **R**: $4 - 2\,i$

10. Se sabe que el cociente $\frac{2+bi}{1-i}$ es un número real. Hallar el valor de b. ¿Cuál debería ser el valor de b para que este cociente fuera imaginario puro?. **R:** $b = -2$ y $b = 2$

11. Hallar el valor de m de manera que el cociente $\frac{3+mi}{2-i}$ sea imaginario puro. **R:** $m = 6$

12. Calcular el valor de k para que el cociente $\frac{k-2i}{3+4i}$ sea: a) Un número real b) Un número imaginario **R:** a) $k = -3/2$ b) $k = 8/3$

13. Calcular el valor de k para que $(k-i)^3$ sea un número real **R:** $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

14. Comprueba que los números complejos $3 + 4i$ y $\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i$ son inversos.

15. Hallar el valor de k para que el afijo de $(2-3i).(k+i)$ sea el punto $P = (5, -1)$ **R:** $k = 1$

16. Los afijos de tres números complejos constituyen los vértices de un triángulo, los cuales se nombran así $A = (2, 0)$ $B = (-3, 5)$ y $C = (3, 1)$. Hallar las coordenadas de los vértices del triángulo que resulta de multiplicar por i dichos números complejos.
R: $A_1 = (0, 2)$ $B_1 = (-5, -3)$ $C_1 = (-1, 3)$

17. Hallar el valor de k para que el afijo del cociente $\frac{3-i}{k-i}$ sea un punto:

a) del eje real b) del eje imaginario **R:** a) $k = 3$ b) $k = -1/3$

18. Hallar los valores de a y b para que se verifique la igualdad $\frac{a-3i}{2+bi} = 3-2i$

R: $a = 20/3$; $b = 1/3$

19. Demuestra que el inverso de $a + bi$ es la expresión $\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$

20. Hallar un número complejo cuyo cuadrado sea igual a su conjugado

R: $\mathbf{Z}_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\mathbf{Z}_2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

21. Hallar dos números complejos $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$ tales que su suma sea $1 + 4i$ y cuyo cociente sea i

R: $\mathbf{Z}_1 = -\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$ $\mathbf{Z}_2 = \frac{5}{2}+\frac{3}{2}i$

22. Hallar b y d de manera que se cumpla la igualdad: $(3+bi).(2-di) = 12-5i$
R: $b_1 = 2$; $d_1 = 3$ $b_2 = -9/2$; $d_2 = -4/3$

23. Dos números complejos conjugados son tales que su diferencia es $6i$ y su cociente un número imaginario puro. Hallar esos números complejos.
R: $\mathbf{Z}_1 = 3+3i$ $\mathbf{Z}_2 = 3-3i$ $\mathbf{Z}_1 = -3+3i$ $\mathbf{Z}_1 = -3-3i$

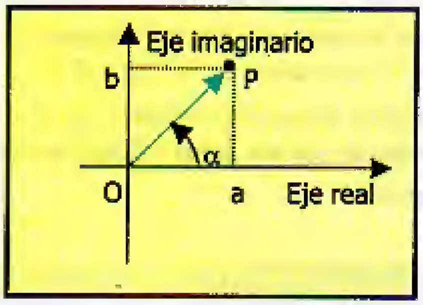
24. Dos números complejos al sumarlos se obtiene $3 + 2i$. Si la parte real de uno de ellos es 2, hallar dichos números sabiendo que su cociente es un imaginario puro.
R: $\mathbf{Z}_1 = 1+\sqrt{3}$ $\mathbf{Z}_2 = 1-\sqrt{3}$ $\mathbf{Z}_1 = 1-\sqrt{3}$ $\mathbf{Z}_2 = 1+\sqrt{3}$

8.8 Módulo y argumento de un número complejo

Hasta ahora hemos analizado que un número complejo **Z** puede ser expresado en forma binómica como **Z** = a + b i.

El afijo P del numero **Z** queda determinado por el vector cuyo origen es el origen de coordenadas y cuyo extremo es el afijo, es decir, el vector **OP**. Este vector nombrado recibe el nombre de **vector de posición** del punto P.

En general, un número complejo **Z** = a + b i queda caracterizado por su afijo o su vector de posición.



Llamaremos **módulo** o **valor absoluto** del número complejo **Z** y lo designaremos por $|\mathbf{Z}|$, a la distancia medida entre el origen y el afijo de **Z**.

Si **Z** = a + b i, su módulo es $|\mathbf{Z}| = |\mathbf{OP}| = \sqrt{a^2+b^2}$

Ejemplos

Ejemplo1

Dados los complejos $\mathbf{Z_1} = -3 + 5i$ $\quad \mathbf{Z_2} = 2 - 2\sqrt{3}$ sus módulos vendrán dados por:

$$|\mathbf{Z_1}| = \sqrt{(-3)^2+5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$|\mathbf{Z_2}| = \sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

Llamaremos **argumento** del número complejo **Z** = a + b i , denotándolo como arg(Z), al ángulo α que forma el vector de posición **OP** con el semieje positivo de las abscisas, medido en sentido contrario al giro de las agujas del reloj.

Conocidos a y b, para determinar el valor de α, se aplica la fórmula:

$$\text{tag}\ \alpha = \frac{b}{a}$$

Es de hacer notar, que el módulo de un número complejo es único, en cambio los argumentos son infinitos, ya que existen infinitos ángulos con una misma tangente.

El argumento del número complejo dependerá de los signos de a y b, es decir, del cuadrante en el que se encuentre ubicado el afijo.

El argumento para el cual se verifique que $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ se llama **argumento principal**.

Ejemplo

Si **Z** = 3 – 5 i el argumento del número complejo **Z** viene dado así:

$$\text{tag}\ \alpha = \frac{-5}{3} \longrightarrow \alpha = \text{tag}^{-1}\left(\frac{-5}{3}\right) \longrightarrow \alpha_1 = 240°\ 57'\ 50'' \quad \alpha_2 = 120°\ 57'\ 50''$$

8.9 Forma polar o trigonométrica de un número complejo

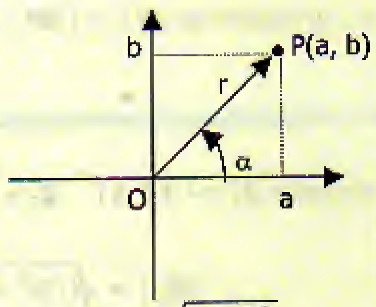
Hasta el momento hemos trabajado con operaciones de números complejos expresados en forma binómica, es decir, en la forma **Z** = a + b i

Es posible expresarlo también por el módulo r y por su argumento α, expresión ésta que recibirá el nombre de **forma polar** o **trigonométrica.**

Veamos:

Sea el número complejo expresado en forma polar:
$Z = a + b\,i$.
Si el punto P = (a, b) está expresado en coordenadas polares se tendrá que:
$a = r \cdot \cos\alpha$ y $b = r \cdot \text{sen}\,\alpha$
donde r es el módulo del complejo
Sustituyendo las dos expresiones anteriores en la forma binómica **Z** = a + b i, se tendrá que:
$Z = a + b\,i = r\cos\alpha + (r\,\text{sen}\,\alpha)\,i$
$a + b\,i = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$

En la figura se observa el punto P = (a, b).
$a = r \cdot \cos\alpha$
$b = r \cdot \text{sen}\,\alpha$



$r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

La expresión $r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ es llamada **forma polar o trigonométrica** de un número complejo:

$$Z = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$$

Si llamamos $\cos i + i\,\text{sen}\,\alpha = \text{cis}\,\alpha$, podemos escribir también que:

$$Z = r\,\text{cis}\,\alpha$$

Algunos autores le dicen a $Z = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ **forma trigonométrica** y a $Z = r\,\text{cis}\,\alpha$ le dicen **forma polar**

De acuerdo a lo analizado podemos decir lo siguiente:

Un número complejo puede ser expresado de varias formas distintas:

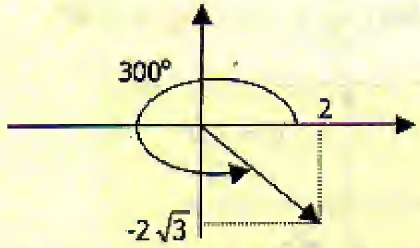
Forma binómica $Z = a + b\,i$

Forma polar: $Z = r\,\text{cis}\,\alpha$

Forma trigonométrica: $Z = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$

Estudiaremos a continuación el procedimiento de pasar de una forma de expresión a otra

8.10 Transformación de forma binómica a polar y viceversa

Transformación de forma binómica a polar	Transformación de forma polar a forma binómica
Pasar a forma polar el número complejo $\mathbf{Z} = 2 - \sqrt{3}\,i$ Calculemos el módulo de **Z** $\mathbf{Z} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$ $\text{tag}\ \alpha = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \longrightarrow \alpha = \begin{cases} 120^\circ \\ 300^\circ \end{cases}$ Representemos el afijo y observaremos en qué cuadrante está. Obsérvese que está en el cuarto cuadrante y el argumento debe ser 300°  $\mathbf{Z} = 4\,(\cos 300^\circ + i \text{ sen } 300^\circ) = \mathbf{Z} = 4 \text{ cis } 300^\circ$	Pasar a forma binómica el complejo dado como $\mathbf{Z} = 6 \text{ cis } 240^\circ$. Calculemos los valores de a y b de la siguiente manera: $a = r \cdot \cos\alpha$ $a = 6 \cdot \cos 240^\circ$ $a = 6 \cdot (-0{,}5)$ $a = -3$ $b = r \cdot \text{sen}\ \alpha$ $b = 6 \cdot \text{sen } 240^\circ$ $b = 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3\sqrt{3}$ Podemos escribir en forma binómica que: $\mathbf{Z} = -3 - 3\sqrt{3}\,i$

Ejemplo 1 Expresar el complejo $\mathbf{Z} = -\sqrt{3} + 2i$ en forma trigonométrica

Solución

Debe quedar expresado en forma trigonométrica así: $\mathbf{Z} = r\,(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha) = r \text{ cis } \alpha$

Observemos que a = -3 y b = -2

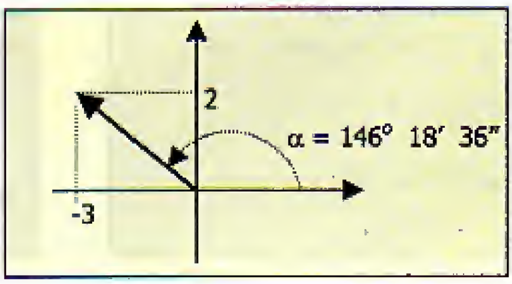
Debemos calcular el módulo y el argumento.

El módulo viene dado por $r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

El argumento lo determinamos por la expresión $\text{tag}\ \alpha = \frac{b}{a}$

$\text{tag}\ \alpha = \frac{2}{-3} \longrightarrow \alpha = \text{arc tag}\left(\frac{2}{-3}\right) \longrightarrow \alpha = 33^\circ\ 41'\ 24''$

El ángulo α se encuentra en el segundo cuadrante y el argumento en definitiva será:
$\alpha = 180^\circ - 33^\circ\ 41'\ 24''$
$\alpha = 146^\circ\ 18'\ 36''$



Luego el número complejo en forma binómica **Z** = - 3 + 2 i escrito en forma polar o trigonométrica es:

$$\mathbf{Z} = \sqrt{3}\,(\cos 146^\circ\ 18'\ 36'' \ - i \operatorname{sen} 146^\circ\ 18'\ 36'')$$

$$\mathbf{Z} = \sqrt{3} \operatorname{cis} 146^\circ\ 18'\ 36''$$

Ejemplo 2 Expresar el complejo $\mathbf{Z} = \sqrt{3} - i$ en forma trigonométrica

Solución

Observemos que $a = \sqrt{3}$ y $b = -1$

El módulo viene dado por $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

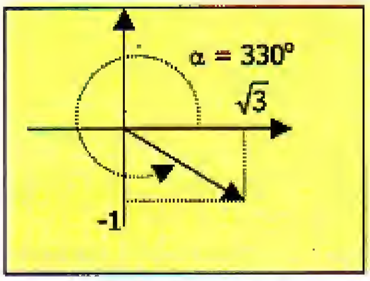
Calculemos el argumento

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{b}{a} \longrightarrow \operatorname{tag} \alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}} \longrightarrow \alpha = \operatorname{arc\,tag}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \longrightarrow \alpha = 30^\circ$$

Como la parte real es positiva y la parte imaginaria es negativa se tendrá que el argumento de **Z** será un ángulo del cuarto cuadrante:

$\alpha = 360^\circ - 30^\circ$

$\alpha = 330^\circ$



Luego el número complejo en forma binómica $\mathbf{Z} = \sqrt{3} - i$ se puede escribir en forma polar o trigonométrica así:

$$\mathbf{Z} = 2\,(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ)$$
$$\mathbf{Z} = 2 \operatorname{cis} 330^\circ$$

Ejemplo 3 Expresar en forma binómica el complejo $\mathbf{Z} = 2\,(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$

Solución

Debemos escribirlo en la forma **Z** = a + b i , lo que nos indica que debemos determinar los valores de a y b.

Si comparamos las expresiones $\mathbf{Z} = 2\,(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$ y $\mathbf{Z} = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ nos daremos cuenta que r = 2.

Calculemos cos 120° y sen 120°.

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen}(120^\circ - 60^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sustituyendo los valores de los ángulos en la expresión **Z** = 2 (cos 120° + i sen 120°) nos queda que:

$$\mathbf{Z} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Si efectuamos la operación se tendrá que:

$$\mathbf{Z} = -1 + \sqrt{3}\,i$$

Ejemplo 4 Expresar en forma binómica el complejo **Z** = 1 (cos 135° + i sen 135°)

Solución

Evaluemos cos 135° y sen 135°

$$\cos 135° = \cos(180° - 135°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen}(180° - 135) = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sustituyendo los valores de sen 135° y cos 135° en la expresión **Z** = 1 (cos 135° + i sen 135°) nos queda que:

$$\mathbf{Z} = 1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\mathbf{Z} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Expresar en forma polar cada uno de los siguientes complejos:

a) $\mathbf{Z} = -3 + 3i$ b) $\mathbf{Z} = 2 + 2i$ c) $\mathbf{Z} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ d) $\mathbf{Z} = -4$ e) $\mathbf{Z} = 2i$

f) $\mathbf{Z} = 2 + 5i$ g) $\mathbf{Z} = \sqrt{3} - i$ h) $\mathbf{Z} = 2 - \sqrt{3}\,i$ i) $\mathbf{Z} = -4 + 3i$ j) $\mathbf{Z} = -\sqrt{5} + 15i$

k) $\mathbf{Z} = \sqrt{5} - \sqrt{7}\,i$ ℓ) $\mathbf{Z} = -3 - 3i$ m) $\mathbf{Z} = 1 - i$

Respuestas

a) $3\sqrt{2}$ cis 135° b) $2\sqrt{2}$ cis 45° c) 3 cis 30° d) 4 cis 180° e) 2 cis 90°
f) 5,385 cis 68° 12′ g) 2 cis 330° h) $\sqrt{7}$ cis 319° 06′ i) 5 cis 143° 07′
j) $2\sqrt{5}$ cis 120° k) $2\sqrt{3}$ cis 310° 12′ ℓ) $3\sqrt{2}$ cis 225° m) $\sqrt{2}$ cis 315°

2. Expresar en forma binómica cada uno de los siguientes complejos:

a) $\mathbf{Z} = 3$ cis 60° b) $\mathbf{Z} = 4$ cis 100° c) $\mathbf{Z} = 5$ cis 306° 54′ d) $\mathbf{Z} = 3$ cis 150°

e) $\mathbf{Z} = \sqrt{2}$ cis 315° f) $\mathbf{Z} = 8$ cis 180° g) $\mathbf{Z} = 3$ cis 135° h) $\mathbf{Z} = 2$ cis 240° i) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cis 300°

j) $\mathbf{Z} = \frac{2}{3}$ cis 120 k) $\mathbf{Z} = \sqrt{8}$ cis 135° ℓ) $\mathbf{Z} = 4$ cis 135°

Respuestas

a) $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$	**b)** $-0{,}69 + 3{,}94\,i$	**c)** $3 - 4i$	**d)** $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$
e) $1 - i$ f) -8	g) $-\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$	h) $-1 - \sqrt{3}\,i$	i) $\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}i$
j) $-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$	k) $2 + 2i$	ℓ) $-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$	

3. Calcular el opuesto y el conjugado de cada uno de los siguientes números complejos, expresándolos en forma polar.

a) $\mathbf{Z} = 1 - \sqrt{3}\,i$ b) $\mathbf{Z} = 1/2$ cis 200° c) $\mathbf{Z} = \sqrt{2}$ cis 75° d)

Respuestas:

a) $-\mathbf{Z} = 2$ cis 120° $\overline{\mathbf{Z}} = 2$ cis 60°	b) $-\mathbf{Z} = 4$ cis 165° $\overline{\mathbf{Z}} = 4$ cis 15°
c) $-\mathbf{Z} = \sqrt{2}$ cis 465° $= \sqrt{2}$ cis 105°	$\overline{\mathbf{Z}} = \sqrt{2}$ cis 75°

8.11 Operaciones con números complejos en forma trigonométrica o polar

La forma trigonométrica de los números complejos es especialmente cómoda para operar con productos, cocientes y, sobre todo, potencias y raíces enésimas de dichos números.

➧ Producto de dos números complejos en forma polar

Sean $\mathbf{Z}_1 = r_1 (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1)$ y $\mathbf{Z}_2 = r_2 (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2)$ dos complejos cualesquiera. El producto queda definido así:

$$\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos (\alpha_1 + \alpha_2) + i \operatorname{sen} (\alpha_1 + \alpha_2)] = r_1 \cdot r_2 \operatorname{cis} (\alpha_1 + \alpha_2)$$

> El producto de dos números complejos en forma polar, es otro número complejo que tiene por módulo el producto de los módulos, y de argumento la suma de los argumentos.

Demostración

Sean $\mathbf{Z}_1 = r_1 (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1)$ y $\mathbf{Z}_2 = r_2 (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2)$ dos números complejos

Evaluemos el producto

$$\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 = r_1 (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1) \cdot r_2 (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2)$$
$$= (r_1 . r_2)[\underbrace{(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2)}_{(\mathrm{I})} + i \underbrace{(\operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2)}_{(\mathrm{II})}]$$

La expresión (I) es equivalente a $\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2$

La expresión (II) es equivalente a $\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2) = \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2$

Luego nos queda que:

$$\mathbf{Z}_1 . \mathbf{Z}_2 = (r_1.r_2)[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)] = r_1.r_2 \operatorname{cis}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

Ejemplo →

Si $\mathbf{Z}_1 = 2 \operatorname{cis} 30^\circ$ y $\mathbf{Z}_2 = 3 \operatorname{cis} 60^\circ$ el producto $\mathbf{Z}_1 . \mathbf{Z}_2$ viene dado así:

$\mathbf{Z}_1 . \mathbf{Z}_2 = 2 \operatorname{cis} 30^\circ . 3 \operatorname{cis} 60^\circ = 2.\ 3 \operatorname{cis}(30^\circ + 60^\circ) = 6 \operatorname{cis} 90^\circ$

Cociente de dos números complejos en forma polar

Sean $\mathbf{Z}_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1)$ y $\mathbf{Z}_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_2)$ dos números complejos, siendo $\mathbf{Z}_2 \neq 0$

Se define el cociente de la manera siguiente:

$$\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{r_1(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1)}{r_2(\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

Demostración

Sean $\mathbf{Z}_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1)$ y $\mathbf{Z}_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_2)$ dos números complejos, siendo $\mathbf{Z}_2 \neq 0$

Para efectuar el cociente se expresan en forma trigonométrica y se multiplican numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{r_1(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1)}{r_2(\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_2)} = \frac{r_1(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1)(\cos\alpha_2 - i \operatorname{sen}\alpha_2)}{(\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_2)(\cos\alpha_2 - i \operatorname{sen}\alpha_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - i \cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2 - i^2 \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2}{\cos^2\alpha_2 + \operatorname{sen}^2\alpha_2}$$

Agrupando en el numerador las partes reales y las partes imaginarias y haciendo en el denominador $\operatorname{sen}^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_2 = 1$ nos queda que:

$$\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{r_1}{r_2}.[\underbrace{(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2)}_{(\mathrm{I})} + i\underbrace{(\operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_2 \cos\alpha_1)}_{(\mathrm{II})}]$$

La expresión (I) es equivalente a $\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ y la expresión (II) equivale a $\operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)$.

Luego nos queda que:

$$\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{r_1}{r_2}.[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

Luego

$$\frac{r_1(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1)}{r_2(\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_2)} = \frac{r_1}{r_2}.[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

Escribiéndolo con la otra notación se tiene que

$$\boxed{\frac{r_1 \text{ cis } \alpha_1}{r_2 \text{ cis } \alpha_2} = \frac{r_1}{r_2}\text{cis}(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

El cociente de dos números complejos, en forma polar, es otro número complejo que se obtiene al dividir los módulos y restar los argumentos.

Si se obtiene un argumento negativo, se le puede sumar $2\pi = 360°$ y se obtiene así el argumento principal.

Ejemplo

Dados los siguientes números complejos $Z_1 = 9 \text{ cis } 60°$, $Z_2 = 3 \text{ cis } 90°$ y $Z_3 = 2\sqrt{3} \text{ cis } 120°$

calcular a) $\frac{Z_1}{Z_2}$ b) $\frac{Z_3 . Z_2}{Z_1}$

Solución

a) $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{9 \text{ cis } 60°}{3 \text{ cis } 90°} = 3 \text{ cis } (60° - 90°) = 3 \text{ cis } (-30°) = 3 \text{ cis } (-30° + 360°) = 3 \text{ cis } 330°$

$\frac{Z_1}{Z_2} = 3 \text{ cis } 330°$

Nótese que obtuvimos un ángulo negativo de –30° al cual, como dijimos antes, le sumamos 360°

b) $\frac{Z_3 . Z_2}{Z_1} = \frac{2\sqrt{3} \text{ cis } 120° . 3 \text{ cis } 90°}{9 \text{ cis } 60°} = \frac{6\sqrt{3} \text{ cis } 210°}{9 \text{ cis } 60°} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{cis } 150°$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Dados los complejos $Z_1 = 15 \text{ cis } 330°$ y $Z_2 = 3 \text{ cis } 150°$, hallar el resultado de las siguientes operaciones:

a) $Z_1 . Z_2$ b) $\frac{Z_1}{Z_2}$ c) $\frac{Z_2}{Z_1}$ R: a) 45 cis 120° b) 5 cis 180° c) $\frac{1}{5}$ cis 180°

2. Convierte en la forma polar y luego multiplica o divide según sea el caso:

a) $(1 - i) . (2 + 2i)$ b) $(10\sqrt{3}\,i + 10\,i)(\sqrt{3} - i)$ c) $(2\sqrt{3} + 2i)(2i)$ d) $\frac{1+i}{1-i}$

e) $\frac{-1+i}{\sqrt{3}+i}$ f) $\frac{2\sqrt{3} - 2i}{1 + \sqrt{3}\,i}$ g) $\frac{(10\sqrt{3} - 10\,i)(\sqrt{3} + i)}{1 - i}$ h) $\frac{2i.(-4i)}{(\sqrt{3} + i)(1 - i)}$

R: a) 4 cis 0° b) 40 cis 0° c) 8 cis 120° d) cis 90° e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cis 105° f) 2 cis 270°

g) $\frac{40}{\sqrt{2}}$ cis 45° h) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ cis 175°

3. Efectuar y expresar el resultado en forma binómica:

a) 5 cis 30° . 2 cis 60°

b) $\dfrac{\text{cis } 20°.\ 7 \text{ cis } 160°}{4 \text{ cis } 200°.3 \text{ cis } 100°}$

c) $\dfrac{3 \text{ cis } 30°.\ 2 \text{ cis } 90°}{4 \text{ cis } 180°\ .\text{cis } 135°}$

d) $\dfrac{2 \text{ cis } (-60°).\ 4 \text{ cis } 90°}{2 \text{ cis } 70°\ .5 \text{ cis } 80°}$

R: a) 10 i b) $-\frac{7}{24} - i\frac{7\sqrt{3}}{24}$ c) −1,45 + 0,39 i d) − 0,136 − 0,784 i

4. Dados los complejos $\mathbf{Z_1}$ = 3 cis 75° y $\mathbf{Z_2}$ = 4 cis 20°, calcular $\mathbf{Z_1} + \mathbf{Z_2}$ y expresar el resultado en forma polar. **R:** 4,54 + 4,27 i

➡*Potencia de número complejo en forma polar*

Consideremos el número complejo r cis α y su cuadrado.

$(r \text{ cis } \alpha)^2 = (r \text{ cis } \alpha) . (r \text{ cis } \alpha)$ (expresando la potencia en dos productos de igual base)

$= r . r . \text{cis}(\alpha + \alpha)$ (aplicando el producto de complejos)

$= r^2 \text{ cis } 2\alpha$

Evaluemos ahora $(r \text{ cis } \alpha)^3$

$(r \text{ cis } \alpha)^3 = (r \text{ cis } \alpha)\ (r \text{ cis } \alpha)\ (r \text{ cis } \alpha)$

$= r . r . r \text{ cis}(\alpha + \alpha + \alpha)$

$= r^3 \text{ cis } 3\alpha$

La generalización de estas expresiones constituye el teorema de De Moivre, el cual se enuncia así:

> Para cualquier número complejo r cis α y cualquier número natural n, se tiene que:
>
> $$(r \text{ cis } \alpha)^n = r^n \text{ cis } n\alpha$$

Ejemplo 1 Hallar $(1 + i)^9$

Encontremos la forma polar de 1 + i, sabiendo que a = 1 y b = 1

El módulo viene dado por $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ➡ $r = \sqrt{2}$

El argumento viene dado por tag α = b/a

tag $\alpha = \frac{1}{1}$ ➡ α = arc tag 1 ➡ α = 45°

Luego $1 + i = \sqrt{2}$ cis 45°

$(1 + i)^9 = (\sqrt{2}$ cis $45°)^9 = (\sqrt{2})^9$ (cis 45° . 9) = $16\sqrt{2}$ cis 405° = $16\sqrt{2}$ cis (405° – 365°)
= $16\sqrt{2}$ cis 45°

$(1 + i)^9 = 16\sqrt{2}$ cis 45°

Si deseamos expresarlo en la forma binómica lo escribimos así:

$$16\sqrt{2}\,(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) = 16\sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 16 + 16\,i$$

Luego, en forma binómica se tendrá que $(1 + i)^9 = 16 + 16\,i$

Ejemplo 2 Expresar en forma polar el resultado de la operación $(1 - \sqrt{3})^5$

Encontremos la forma polar de $1 - \sqrt{3}$, sabiendo que a = 1 y $b = -\sqrt{3}$

El módulo viene dado por $r = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$r = 2$

El argumento viene dado por $\tan \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{1} \longrightarrow \alpha = 300°$

Luego $(1 - \sqrt{3})^5 = (2$ cis $300°)^5 = 2^5$. cis 300°.5

$(1 - \sqrt{3})^5$ = 32 cis 1500° = 32 cis 60°

Nótese que hemos reducido al argumento principal, dividiendo 1500 entre 4 y usamos el resto que es 60°

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Calcular usando la fórmula de De Moivre y expresar el resultado en forma binómica.

a) $(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i)^3$ b) $(1 + i\sqrt{3})^4$ c) $(-1 + i)^{10}$ d) $(\sqrt{3} - i)^{10}$

R: a) 27 i b) $-8 + 8\sqrt{3}\,i$ c) – 32 i d) $512 + 512\sqrt{3}\,i$

2. Calcula la potencia cuarta del número complejo (3 – 3 i) expresándola en forma polar
R: 324 cis 180°

3. Calcular $(-4 + 2\,i)^5$ expresándolo en forma polar **R:** $800\sqrt{5}$ cis 47° 10′ 12″

4. Aplicar en cada caso la fórmula de De Moivre y expresar el resultado en la forma binómica:

a) $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{12}$ b) $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{300}$ **R:** a) 1 b) 1

5. 4. Calcular $\frac{\sqrt{2}\text{ cis }315°.(-1+\sqrt{3}\,i)^4}{2\text{ cis }30°}$ expresando el resultado en forma polar y binómica.

R: $8\sqrt{2}$ cis 105° y $(4 - 4\sqrt{3}) + (4 - 4\sqrt{3})\,i$

6. Calcular $\frac{\sqrt{2}}{(1+i)^5}$ R: $-\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{8}i$

7. Calcular: $(-1+\sqrt{3}\,i)^4\ (\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$ R: 16

8. Calcular: a) $\frac{(1+i)(1-i)^3}{(1+2i)^3}$ b) $(\frac{1+i}{1-i})^3$ R: a) $\frac{8}{125}+\frac{44}{125}i$ b) $-i$

Raíz cuadrada de número complejo en forma binómica

Si se tiene un número complejo **Z** = a + b i la idea es calcular en forma binómica $\sqrt{a+bi}$.
Para ello es necesario obtener otro complejo **Z´** = x + y i el cual será la raíz cuadrada de **Z**, tal que verifique la igualdad:

$$\sqrt{a+bi} = x+yi \longrightarrow a+bi = (x+yi)^2$$

Ejemplo Calcular $\sqrt{4+3i} = x+yi$

$4+3i = (x+yi)^2$ (Elevando al cuadrado ambos miembros)
$4+3i = x^2+2xyi+y^2i^2$ (Desarrollando el segundo miembro)
$4+3i = x^2+2xyi+y^2(-1)$ (Porque $i^2 = -1$)
$4+3i = x^2-y^2+2xyi$ (Ordenando)

Si igualamos nos queda el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x^2-y^2 = 4 \text{ ....(I)} \\ 2xy = 3 \text{ ....(II)} \end{cases}$

Despejando y en la ecuación (II) nos queda $y = \frac{3}{2x}$

Sustituyendo la expresión de y en la ecuación (I) nos queda que:

$$x^2-\frac{9}{4x^2} = 4 \longrightarrow 4x^4-9 = 16x^2 \longrightarrow 4x^4-16x^2-9 = 0$$

Como se trata de una ecuación bicuadrada debemos hacer un cambio de variable llamando $x^2 = U$ quedándonos que:

$$4U^2-16U-9 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado con variable U se tiene que:

$$U = \frac{16\pm\sqrt{256+144}}{8} = \frac{16\pm\sqrt{400}}{8} = \frac{16\pm 20}{8} \begin{cases} U_1 = \frac{16+20}{8} = \frac{36}{9} = \frac{9}{2} \longrightarrow U_1 = 9/2 \\ U_2 = \frac{16-20}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \longrightarrow U_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

De las dos soluciones sólo una, $U_1 = 9/2 = x^2$, es la aceptable ya que $x^2 = -1/2$ no es solución.

Si $x^2 = U = \frac{9}{2}$ entonces $x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Sustituyendo en $y = \frac{3}{2x}$ se tiene que $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Las soluciones son los números $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$ y $-\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

Para comprobar que estos valores son ciertos bastará con elevar al cuadrado cada una de ellas y debe darnos 4 + 3 i.

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Hallar en forma binómica las siguientes raíces:

a) $\sqrt{5+12i}$ b) $\sqrt{21+20i}$ c) $\sqrt{21-20i}$ d) $\sqrt{5-\sqrt{24}\,i}$ e) $\sqrt{1-2\sqrt{6}\,i}$ f) $\sqrt{45-28i}$

R: a) $3+2i$ y $-3-2i$ b) $5+2i$ y $-5-2i$ c) $5-2i$ y $-5+2i$
d) $\sqrt{6}-i$ y $-\sqrt{6}+i$ e) $\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i$ y $-\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i$ f) $7-2i$ y $-7+2i$

➧ *Radicación de números complejos en forma polar o trigonométrica*

Definición previa. Igualdad de números complejos

Sean dos números complejos escritos en forma trigonométrica $\mathbf{Z_1} = r_1 \text{ cis } \alpha$ y $\mathbf{Z_2} = r_2 \text{ cis } \beta$. La igualdad queda definida así:

$$\mathbf{Z_1} = \mathbf{Z_2} \longrightarrow r_1 \text{ cis } \alpha = r_2 \text{ cis } \beta \longleftrightarrow r_1 = r_2 \text{ y } \beta = \alpha + 2k\pi \text{ con k entero}$$

Dos números complejos, expresados en forma trigonométrica, son iguales si tienen igual módulo y sus argumentos difieren en un múltiplo de 2π.

Ejemplos

Sean los complejos $\mathbf{Z_1} = 12 \text{ cis } 48°$ y $\mathbf{Z_2} = 12 \text{ cis } 1488°$
Nótese que tienen el mismo módulo y además $1488° = 48° + 4.360°$

$$\beta = \alpha + 2 . k . \pi \text{ con } k = 2$$

Es decir los complejos $\mathbf{Z_1}$ y $\mathbf{Z_2}$ son iguales porque coinciden con la definición.

Los complejos $\mathbf{Z_1} = 6 \text{ cis } 60°$ y $\mathbf{Z_2} = 6 \text{ cis } 2220°$ son iguales por tener igual módulo y el ángulo $2220° = 60° + 2.k.360°$ con $k = 3$.

Raíz de un número complejo

Se dice que a es la raíz n ésima de un número complejo **Z** si $a^n = \mathbf{Z}$, escribiéndose $a = \sqrt[n]{\mathbf{Z}}$

$$\text{Si } a = \sqrt[n]{\mathbf{Z}} \longleftrightarrow a^n = \mathbf{Z}$$

De idéntica forma podemos decir:
La raíz enésima del número complejo, R cis α, es otro número complejo r cis β cuya potencia enésima es R cis α

$$\text{Si } \sqrt[n]{R \operatorname{cis} \alpha} = r \operatorname{cis} \beta \quad \textbf{si y sólo si} \quad R \operatorname{cis} \alpha = (r \operatorname{cis} \beta)^n$$

Si tomamos la expresión a la derecha del sí y sólo sí tendremos que:

$$R \operatorname{cis} \alpha = (r \operatorname{cis} \beta)^n$$

Aplicando la fórmula de De Moivre en el segundo miembro nos queda que:

$$R \operatorname{cis} \alpha = r^n \operatorname{cis} n\beta$$

Si aplicamos la definición previa de igualdad de complejos podemos deducir lo siguiente:

$$R \operatorname{cis} \alpha = r^n \operatorname{cis} n\beta \longrightarrow \begin{cases} r^n = R \longrightarrow r = \sqrt[n]{R} \\ n\beta = \alpha + 2k\pi,\ k \in Z \longrightarrow \beta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n},\ k \in Z \end{cases}$$

Si damos a k valores enteros desde 0 hasta n – 1, obtenemos n argumentos diferentes:

$$\text{Si } k = 0 \qquad \mathbf{Z}_0 = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\alpha}{n}$$

$$\text{Si } k = 1 \qquad \mathbf{Z}_1 = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\alpha + 2\pi}{n}$$

$$\text{Si } k = 2 \qquad \mathbf{Z}_2 = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\alpha + 4\pi}{n}$$

.

.

$$\text{Si } k = n - 1 \qquad \mathbf{Z}_{n-1} = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\alpha + 2(n-1)\pi}{n}$$

Nótese que si hacemos k = n, se obtiene que $\mathbf{Z}^n = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \left(\frac{\alpha}{n} + 2\pi\right)$ el cual difiere de $\mathbf{Z}_0$ en una vuelta.

En general, para valores de k > n se obtienen argumentos que difieren en un número exacto de giros, pudiéndose decir:

Un número complejo en forma trigonométrica r cis α tiene n raíces enésimas distintas, cuyo módulo es la raíz enésima del módulo del complejo dado y cuyos argumentos son obtenidos dando a k valores k = 0, 1, 2, ...n – 1 en la expresión $\beta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}$

$$\sqrt[n]{r \operatorname{cis} \alpha} = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\alpha + 2k\pi}{n},\ k = 0, 1, \ldots\ldots n - 1$$

Ejemplo 1 Hallar las raíces cúbicas del número complejo $\mathbf{Z} = 8 \text{ cis } 90^\circ$

$$\sqrt[3]{8 \text{ cis } 90^\circ} = \sqrt[3]{8} \text{ cis } \frac{90^\circ + 360^\circ k}{3}, k = 0,1,2$$

$$= 2 \text{ cis } \frac{90^\circ + 360^\circ k}{3}$$

Determinemos los argumentos para los diferentes valores de k

Si $k = 0$ $\beta_0 = \dfrac{90^\circ}{3} = 30^\circ$

Si $k = 1$ $\beta_1 = \dfrac{90^\circ + 360}{3} = 150^\circ$

Si $k = 2$ $\beta_1 = \dfrac{90^\circ + 360^\circ.2}{3} = 270^\circ$

Luego las raíces cúbicas del complejo $\mathbf{Z} = 8 \text{ cis } 90^\circ$ son:

$\mathbf{Z}_0 = 2 \text{ cis } 30^\circ$
$\mathbf{Z}_1 = 2 \text{ cis } 150^\circ$
$\mathbf{Z}_3 = 2 \text{ cis } 270^\circ$

Ejemplo 2 Hallar $\sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}\, i}$

Solución

Transformemos el complejo $-2 + 2\sqrt{3}$ de la forma binómica a la forma polar

Encontremos el módulo

$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$

$r = 4$

Encontremos el argumento

$\text{tag } \alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} \longrightarrow \alpha = \text{arc tag } (-\sqrt{3})$

$\alpha = 180^\circ - 120^\circ$

$\alpha = 120^\circ$

Luego $\sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}\, i} = \sqrt[4]{4 \text{ cis } 120^\circ}$

$$\sqrt[4]{4 \text{ cis } 120^\circ} = \sqrt{2} \text{ cis } \frac{120^\circ + 360^\circ k}{4}$$

Si $k = 0$ $\mathbf{Z}_0 = \sqrt{2} \text{ cis } \dfrac{120^\circ}{4} = \sqrt{2} \text{ cis } 30^\circ$

Si $k = 1$ $\mathbf{Z}_1 = \sqrt{2} \text{ cis } \dfrac{120^\circ + 360^\circ}{4} = \sqrt{2} \text{ cis } 120^\circ$

Si $k = 2$ $\mathbf{Z}_2 = \sqrt{2} \text{ cis } \dfrac{120^\circ + 360^\circ.2}{4} = \sqrt{2} \text{ cis } 210^\circ$

Si $k = 3$ $\mathbf{Z}_3 = \sqrt{2} \text{ cis } \dfrac{120^\circ + 360^\circ.3}{4} = \sqrt{2} \text{ cis } 300^\circ$

$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{2} \text{ cis } 30$
$\mathbf{Z}_1 = \sqrt{2} \text{ cis } 120^\circ$
$\mathbf{Z}_2 = \sqrt{2} \text{ cis } 210^\circ$
$\mathbf{Z}_3 = \sqrt{2} \text{ cis } 300^\circ$

Observaciones

Los números reales tienen argumento 0° si son positivos, y 180° si son negativos

La forma polar de Z = 4 viene dada por Z = 4 cis 0°

La forma polar de Z = - 4 viene dada por Z = 4 cis180°

Ejemplo 3

Una de las raíces cúbicas de un número complejo **Z** es $\mathbf{Z^o} = \sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$. Hallar **Z** y sus otras dos raíces.

Solución

Expresemos una de las raíces $\mathbf{Z^o}$ en forma polar

$$\mathbf{Z^o} = \sqrt{2}+\sqrt{2}\,i. \longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{tag } \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \longrightarrow \alpha = 45^\circ \end{cases}$$

Luego $\mathbf{Z^o}$ escrito en forma polar es $\mathbf{Z^o}$ = 2 cis 45°

De acuerdo con la condición del problema $\mathbf{Z^o}$ es una raíz cúbica de **Z**, por lo que puede escribirse que:

$$\sqrt[3]{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z^o}$$
$$\sqrt[3]{\mathbf{Z}} = 2 \text{ cis } 45^\circ$$
$$\mathbf{Z} = (2 \text{ cis } 45^\circ)^3 \quad \text{(elevando ambos miembros al cubo)}$$
$$\mathbf{Z} = 2^3 \text{ cis } 3.45^\circ \quad \text{(aplicando De Moivre)}$$
$$\mathbf{Z} = 8 \text{ cis } 135^\circ \quad \text{(efectuando las operaciones)}$$

Calculemos las raíces cúbicas de Z

$$\sqrt[3]{8 \text{ cis } 135^\circ} = \sqrt[3]{2^3} \text{cis } \frac{135^\circ + 2k\pi}{3} = 2 \text{ cis } \frac{135^\circ + 2k\pi}{3}$$

Sustituimos por k = 0, 1, 2 en la última expresión

Si k = 0 $\quad \mathbf{Z_0} = 2 \text{ cis } \dfrac{135^\circ}{3} \longrightarrow \boxed{\mathbf{Z_0} = 2 \text{ cis } 45^\circ}$

Si k = 1 $\quad \mathbf{Z_1} = 2 \text{ cis } \dfrac{135^\circ + 360^\circ}{3} \longrightarrow \boxed{\mathbf{Z_1} = 2 \text{ cis } 165^\circ}$

Si k = 2 $\quad \mathbf{Z_2} = 2 \text{ cis } \dfrac{135^\circ + 720^\circ}{3} \longrightarrow \boxed{\mathbf{Z_2} = 2 \text{ cis } 285^\circ}$

Ejemplo 4

Resolver la ecuación $x^4 + 1 = 0$

Solución

$$\text{Si } x^4 + 1 = 0 \longrightarrow x^4 = -1 \longrightarrow x = \sqrt[4]{-1}$$

Debemos encontrar las raíces cuartas de –1 usando un procedimiento similar al ejemplo anterior

$$x = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1 \text{ cis } 180^\circ} = \text{cis } \frac{180^\circ + 2k\pi}{4}$$

$$\text{Si } k = 0 \quad Z_0 = \text{cis } \frac{180^\circ}{4} \longrightarrow Z_0 = \text{cis } 45^\circ$$

$$\text{Si } k = 1 \quad Z_1 = \text{cis } \frac{180^\circ + 360^\circ}{4} \longrightarrow Z_1 = \text{cis } 135^\circ$$

$$\text{Si } k = 2 \quad Z_2 = \text{cis } \frac{180^\circ + 2.360^\circ}{4} \longrightarrow Z_2 = \text{cis } 225^\circ$$

$$\text{Si } k = 3 \quad Z_3 = \text{cis } \frac{180^\circ + 3.360^\circ}{4} \longrightarrow Z_3 = \text{cis } 315^\circ$$

Z_0, Z_1, Z_2 y Z_3 son las raíces de $\sqrt[4]{-1}$ y como consecuencia serán las soluciones de la ecuación dada como $x^4 + 1 = 0$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Hallar las raíces cúbicas del complejo dado como $Z = -4 - 4\sqrt{3}\,i$
   R: 2 cis 80° 2 cis 200° y 2 cis 320°

2. Calcular $\sqrt[3]{-27}$ **R:** 3 cis 60° 3 cis 180° y 3 cis 300°

3. Calcular: a) $\sqrt[3]{i}$ b) $\sqrt[4]{i}$ c) $\sqrt[5]{i}$

R: **a)** cis 30° cis 150° cis 270° **b)** cis 22° 30′ ; cis 112° 30′ ; cis 202° 30′; cis 292° 30′
c) cis 18° ; cis 90° ; cis 162° ; cis 234° ; cis 306°

4. Calcular $\sqrt[3]{8 - 8i}$ **R:** $2\sqrt[6]{2}$ cis 105° ; $2\sqrt[6]{2}$ cis 225° ; $2\sqrt[6]{2}$ cis 345°

5. Calcular las raíces quintas de 32. **R:** 2 cis 0° ; 2 cis 72°; 2 cis 144°; 2 cis 216° ; 2 cis 288°

6. Calcular las raíces cuartas de (-81 i)
R: 3 cis 67° 30′ ; 3 cis 157° 30′ ; 3 cis 247° 30′ 3 cis 337° 30′

7. Una de las raíces cúbicas de un número complejo **Z** es $\mathbf{Z}^{o} = \sqrt{3}+\sqrt{3}\,i$. Hallar **Z** y sus otras dos raíces. $\mathbf{Z} = 24\sqrt{3}$ cis 180° $\mathbf{Z}_0 = 2\sqrt{3}$ cis 60° $2\sqrt{3}$ cis 180° $2\sqrt{3}$ cis 300°

8. Una de las raíces cuartas de un número complejo **Z** es $\mathbf{Z}^{o} = \sqrt{3}+i$. Hallar **Z** y sus otras tres raíces. **R: Z** = 16 cis 120°.
Las raíces son: 2 cis 30° ; 2 cis 120° ; 2 cis 210° ; 2 cis 300°

9. Se sabe que $\sqrt{5}+2\,i$ es una de las raíces sextas de un número complejo, hallar el número complejo y las otras raíces.

R: Z = 729 cis 250° 8′ y las raíces son: 3 cis 41° 8′ ; 3 cis 101° 8′ ; 3 cis 161° 8′
3 cis 221° 8′ ; 3 cis 281° 8′ ; 3 cis 341° 8′

10. Calcular el valor de **Z** en la expresión $\mathbf{Z} = \sqrt[4]{-1-\sqrt{3}\,i}$ expresándolo en forma trigonométrica y dar los resultados en forma binómica.

R: $\pm\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}\pm\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}i$ $\pm\dfrac{\sqrt[4]{18}}{2}\mp\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}i$

11. Calcular $\sqrt[3]{16 \text{ cis } 93°}$ **R:** 2 cis 31° 2 cis 151° y 2 cis 271°

12. Expresar en forma binómica $\mathbf{Z} = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$ **R:** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ y $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

13. Expresar en forma binómica $\mathbf{Z} = \sqrt{1+2\sqrt{2}\,i}$ **R:** $\sqrt{2}+i$ y $-\sqrt{2}-i$

14. Expresar en forma binómica el complejo: $\mathbf{Z} = \sqrt{\dfrac{1+i}{1-i}}$ **R:** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ y $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

15. Dados los complejos en forma polar $\mathbf{Z}_1 = \sqrt{2}$ cis 45° $\mathbf{Z}_2 = 2$ cis 60° $\mathbf{Z}_3 = 8$ cis 120° y $\mathbf{Z}_4 = 8$ cis 240°.
Evaluar: a) $\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$ b) $\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4$ c) $\mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4$
R: a) $2 + (1+\sqrt{3}\ i)$ b) -8 c) $8\sqrt{3}\,i$

16. Hallar las raíces de la ecuaciones siguientes: a) $x^3 + 8 = 0$ b) $x^3 - 8 = 0$ c) $x^6 + 64 = 0$

R: a) 2 cis 60° ; 2 cis 180° ; 2 cis 300° **b)** 2 cis 0° ; 2 cis 120° ; 2 cis 240° **c)** 2 cis 30° ;

2 cis 90° ; 2 cis 150° 2 cis 210° ; 2 cis 270° ; 2 cis 330°.

17. Calcular trigonométricamentre la expresión $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2}$

R: $\sqrt[3]{4}$ cis 30° ; $\sqrt[3]{4}$ cis 150° ; $\sqrt[3]{4}$ cis 270°

18. Efectuar la operación y escribir el resultado en forma trigonométrica: $\dfrac{8+8\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2+\sqrt{3}}\,.\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

R: 16 cis 60°

19. Calcular: $\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}$ **R:** 4; 2 i; -2 i; - 4

20. Expresar el resultado en forma binómica de **Z** = $\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}+i}}$

R: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ y $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

21. Hallar las raíces cúbicas del numero complejo $-4-4\sqrt{3}\,i$

R: 2 cis 80°, 2 cis 200°, 2 cis 320°

8.12 Cómo usar la calculadora para pasar de la forma binómica a la forma trigonométrica.

Si observamos detenidamente una calculadora científica notaremos que en la parte superior de las teclas + y - están una letras amarillas en la cuales se lee R→P y P→R. Esto significa de rectangular a polar, la primera, y de polar a rectangular la segunda.

En otro lado, parte superior de la tecla indicada con el símbolo [(..... , aparece X←→Y

Veamos un cuadro explicativo sobre el procedimiento.

De forma binómica a forma polar	De forma polar a forma binómica
Consideremos el complejo **Z** = 2 + 3 i Parte real a = 2 . Parte imaginaria b = 3 Se oprime la tecla del 2 para introducir la parte real a = 2 A continuación, y de una manera sucesiva, se oprimen las teclas INV ó SHIFT y luego R→P para ir de rectangular a polar. Se oprime la tecla del 3 para introducir la parte imaginaria b = 3, luego se oprime la tecla igual = para obtener el módulo r del complejo, dándonos 3,6. Se oprimen las teclas INV ó SHIFT y a continuación X←→Y, obteniéndose el valor del ángulo α = 56° 18′ 35″ **Z** = 2 + 3 i **Z** = 3,6 cis 56° 18′ 35″	Consideremos el complejo **Z** = 2 cis 315° El módulo r = 2. El ángulo α = 315° Se oprime la tecla del 2 para introducir el módulo del complejo. En forma sucesiva se oprimen las teclas INV ó SHIT y P→R para ir de polar a rectangular. Se introduce el valor del ángulo α = 315°, y a continuación se oprime la tecla con el símbolo igual =, obteniéndose la parte real del complejo que será a = 1,414. Se oprimen en forma sucesiva las teclas INV ó SHIFT y X←→Y, obteniéndose como parte imaginaria b = -1,414 i **Z** = 2 cis 315° **Z** = 1,414 - 1,414 i

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Usa tu calculadora científica para transformar de la forma binómica a la forma polar.

a) $Z = -1 + i$ b) $2 - \sqrt{3}\,i$ c) $\sqrt{3} + \sqrt{2}\,i$ d) $-11 - 9i$ e) $2 + 3i$ f) $-\sqrt{5} + \sqrt{15}\,i$

g) $-4 - 4i$ h) $-4 + 3i$ i) $3 - 3\sqrt{2}\,i$ j) $3 - 3i$ k) $5 - 4i$ ℓ) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

m) $-3\sqrt{3} + 3i$ n) $2 - 2i$ ñ) $1{,}93 - 2{,}3i$ o) $0{,}04 + 0{,}498i$

2. Usa tu calculadora científica para transformar de la forma polar a la forma binómica.

a) 3 cis 135° b) 2 cis 240° c) 8 cis 180° d) 5 cis 330° e) 6 cis 270° f) 4 cis 75°

g) 4 cis 75° h) 2 cis 90° i) 3 cis 60° j) 4 cis 100° k) $\sqrt{13}$ cis 146° 18′

ℓ) 3 cis 150° m) 4 cis 270° n) 6 cis 210° ñ) 8 cis 300° o) 2 cis 145°

Respuestas

1) a) 1,41 cis 135° b) 2,65 cis 319° 06′ c) 2,24 cis 396° 13′ 53″ d) 14,2 cis 219° 17′
e) 3,6 cis 56° 18′ f) 4,47 cis 120° g) 5,7 cis 225° h) 5 cis 143° 07′
i) 5,2 cis 305° 16′ j) 4,24 cis 315° k) 6,4 cis 320° 20′ ℓ) 3 cis 30°
m) 6 cis 150° n) 2,83 cis 315° ñ) 3 cis 310° o) $\frac{1}{2}$ cis 85°

2) a) $-2{,}12 + 212i$ b) $-1 - 1{,}7i$ c) -8 d) $4{,}33 - 2{,}5i$ e) $-6i$
f) $1{,}03 + 3{,}86i$ g) -4 h) $2i$ i) $1{,}5 + 2{,}6i$ j) $-0{,}69 + 3{,}94i$
k) $-3 + 2i$ ℓ) $-2{,}6 + 1{,}5i$ m) $-4i$ n) $-5{,}20 - 3i$ ñ) $4 - 6{,}93i$
o) $-1{,}64 + 1{,}15i$

Actividades complementarias

1. Expresar en forma binómica el complejo **Z** = 3 cis 150°

R: $-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

2. Expresar en forma trigonométrica el complejo **Z** = 1 – i

R: $\sqrt{2}$ cis 315°

3. Hallar los valores de a y b para que sea $\frac{a-3i}{2+bi}=3-2i$

R: a = 20/3 b = -1/3

4. Hallar el módulo de el complejo **Z** = $\frac{(3+2i)(1-i)}{(4+i)(2-i)}$

R: $\sqrt{\frac{26}{85}}$

5. Resuelve la ecuación $Z^3 + 27 = 0$ y representa sus soluciones

R: 3 cis 60°, 3 cis 180°, 3 cis 300°

6. Dada la expresión siguiente: $\frac{\sqrt{3}\ \text{cis}\ 30°(1-\sqrt{3}\,i)^3}{(1-i)^2}$ verificar cuál de las respuestas es la correcta:

a) $4\sqrt{3}$ cis 120° b) $4\sqrt{3}$ cis 300° c) $3\sqrt{3}$ cis 120°

7. Calcular: $\frac{(\sqrt{2})\text{cis}\ 315°\,.\,(-1+\sqrt{3}\,i)^4}{2(\cos 30° - i\,\text{sen}\ 30°)}$ y expresar el resultado en las formas polar y binómica.

R: $8\sqrt{2}$ cis 105° y $(4-4\sqrt{3})+(4+4\sqrt{3})i$

8. Hallar el número complejo Z que verifique la siguiente ecuación: $\frac{2i+1}{(1+i)Z-(2-i)}=\frac{1}{3i}$

R: Z = - 1 + 3

9. La suma de dos números complejos es $\mathbf{Z_1} + \mathbf{Z_2} = 6$; el módulo de $\mathbf{Z_1} = \sqrt{13}$ y el módulo de $\mathbf{Z_2}$ es igual a 5. Hallar los números complejos

R: $Z_1 = 2 + 3i$ $Z_2 = 4 - 3i$

$Z_1 = 2 - 3i$ $Z_2 = 4 + 3i$

SUCESIONES Y PROGRESIONES

9.1 Sucesiones

Recordemos dos cosas:

Una función es una correspondencia entre dos conjuntos en la que cada elemento del conjunto inicial tiene una, y sólo una, imagen en el conjunto final.

Una función real de variable real es una función de D • R en R, siendo D el dominio de f(x)

Para formar una sucesión se establece una *función* entre el conjunto N de los números naturales y el conjunto R de los números reales. Esto nos permite definir:

Una sucesión de números reales es una función del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números reales $s: N \longrightarrow R$ de manera que a cada número natural le corresponde un número real.

Dom : { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,..............n,........... }

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

Rgo: { 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ... 5n,............}

Nótese que los términos de la sucesión 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 y 5n se determinan multiplicando cada número natural por 5.

Para cualquier número natural n; el término correspondiente de la sucesión es 5.n o 5n. El término general sería $a_n = 5n$.

Los términos o **elementos de una sucesión** son denotados por medio de una letra, por ejemplo a, y un subíndice i, que indica la posición que ese término ocupa en la sucesión:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots, a_i, \ldots\ldots, a_n$$

Existen sucesiones tales que cada término se puede obtener conociendo los anteriores. Aquí se dice que el término ene-ésimo viene dado por **recurrencia.**

Así, en la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... , la cual es conocida como sucesión de Fibonacci, cada término se obtiene sumando los dos inmediatamente anteriores.

9.2 Término general de una sucesión

Se llama **término general** a_n **de una sucesión** a la expresión o fórmula que permite expresar un término cualquiera en función del lugar que ocupa.
En la sucesión de números primos no existe ninguna fórmula que exprese el término general .

Ejemplo

Dado $a_n = \dfrac{2n^2+5}{n}$, podemos calcular el término a_7 sin necesidad de conocer los términos anteriores; bastará con sustituir por n = 7

$$a_7 = \frac{2.7^2+5}{7} = \frac{2.49+5}{7} = \frac{98+5}{7} = \frac{103}{6} \longrightarrow a_7 = 103/6$$

Veamos un cuadro donde aparece una sucesión, y a la derecha su término general

Sucesiones	Término general
1, 3, 4, 19, 25, 36, ...	$a_n = n^2$
0,1, 2, 3, 4, ...	$a_n = n - 1$
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$	$a_n = \frac{1}{n}$
2, 4, - 6, 8, -10, 12	$a_n = (-1)^n . 2n$
3, 5, 7, 9, 11, ...	$a_n = 2n + 1$
2, 4, 8, 16, 32, ...	2^n

➨Dado el término general de una sucesión determinar sus elementos.

Ejemplo 1 Dado $a_n = \dfrac{2n^2+5}{2}$ escribir la sucesión para n = 1, 2, 3, 4

Solución

$a_1 = \frac{2.1^2+5}{2} = \frac{2.1+5}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$	$a_2 = \frac{2.2^2+5}{2} = \frac{2.4+5}{2} = \frac{8+5}{2} = \frac{13}{2}$
$a_3 = \frac{2.3^2+5}{2} = \frac{2.9+5}{2} = \frac{18+5}{2} = \frac{23}{2}$	$a_4 = \frac{2.4^2+5}{2} = \frac{2.16+5}{2} = \frac{32+5}{2} = \frac{37}{2}$

Luego la sucesión será: $a_n = \dfrac{7}{2}, \dfrac{13}{2}, \dfrac{23}{2}, \dfrac{37}{2}$

Ejemplo 2 Dada la expresión del término general $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ calcular: a_7 y a_{100}.

Solución

$a_7 = \dfrac{7^2}{7+1} = \dfrac{49}{8}$	$a_{100} = \dfrac{100^2}{100+1} = \dfrac{10000}{101}$

➧*Dada una sucesión determinar su término general*

Dado un conjunto cuyos términos estén ordenados, es posible hallar el término general que caracteriza a todos los elementos de la sucesión.

1. Dada la siguiente sucesión : $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\ldots$ hallar el término general.

Solución

Nótese que los numeradores son: 0, 1, 2, 3, 4 , 5 etc y los denominadores 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
El numerador es igual al denominador menos 1

$\frac{1-1}{1}, \frac{2-1}{2}, \frac{3-1}{3}, \frac{4-1}{4},$ etc . Esto nos indica que el término general es $a_n = \dfrac{n-1}{n}$

2. Dada la siguiente sucesión: -1, 4, -9, 16, -25, 36, -49, 64, ... hallar el término general

Solución

Aquí observamos que los términos tienen signos alternados. Esto nos indica que el término general estará multiplicado por $(-1)^n$.
Por otra parte, los números de la sucesión son los cuadrados de los naturales 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, etc.
De acuerdo a los dos análisis podemos escribir que el término general es $a_n = (-1)^n \cdot n^2$

3. Veamos el cuadro que está representando a una sucesión y su término general:

Sucesiones	Término general
2, 5, 10, 17, 26, 37.	$a_n = n^2 + 1$
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...	$a_n = n + 1$
-1, 0, 1, 2, 3, 4, ...	$a_n = n - 2$
1, 3, 5, 7, 9, 13, ...	$a_n = 2n - 1$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. Si $a_n = (-1)^n \cdot n$ hallar a_1, a_2, a_3, a_4 **R:** -1, 2, -3, 4

2. Si $a_n = 2^n + 3$ hallar a_3 **R:** 11

3. Hallar los cuatro primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:

a) $a_n = \frac{4n^2+3n+2}{2n}$ **b)** $b_n = 2n^2 - 3$ **c)** $c_n = \frac{4n+1}{4n-1}$ **d)** $d_n = (-2)^{n+1}$

R: 9/2, 6, 47/4, 39/4 **R:** -1, 5, 15, 29 **R:** 5/3, 9/7, 13/11, 17/15 **R:** 4, -8, 16, -32

4. Dada la sucesión $a_n = (-1)^n \frac{3n+5}{n^2-3}$ determinar los cinco primeros términos

R: 4, 11, -7/3, 17/3, -10/11

5. Calcular el séptimo término de la sucesión $a_n = (-n)^3$ **R:** - 343

6. Calcular el séptimo término de la sucesión $a_n = \frac{2^{n-1}}{4n+1}$ **R:** 16/21

7. Dados los términos generales de las sucesiones $a_n = (-1)^n \frac{n+3}{n^2+1}$ y $b_n = -4.(3)^{n-1}$ hallar:

a) $a_2 + b_3$ b) $a_3 - b_2$ **R:** a) –35 b) 34/3

8. Dadas las sucesiones $a_n = (-1)^n \frac{1}{3^{n-1}}$ y $b_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$ calcular: $a_5 + b_5$ **R:** 179/810

9. Dadas las sucesiones $a_n = (-1)^n \frac{2^n}{1+2^n}$ y $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$ calcular $a_5 - b_5$ **R:** -673/660

10. Escribir los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales se indican:

a) $a_n = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$ **R:** $1,\ 2,\ \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{4}, 2$

b) $a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$ **R:** 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4

11. Hallar el término general en cada una de las siguientes sucesiones:

a) 3, 5, 7, 9, 11, ... b) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ... c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{26}, \ldots$

d) $-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots$ e) 3, 1, -1, -3, -5, ... f) 5, 3, 1, -1, -3, ...

g) $1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \ldots$ h) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ i) 1. 5, 9, 13, ...

j) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ k) 2, 4, 8, 16, 32, ... ℓ) $2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{56}, \frac{37}{6}, \ldots$

m) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{45}, \frac{4}{5}, \ldots$

Respuestas

a) $a_n = 2n + 1$ b) $a_n = (-1)^{2n}$ c) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ d) $a_n = \frac{n-1}{4}$ e) $a_n = 5 - 2n$

f) $a_n = 7 - 2n$ g) $a_n = \frac{2n}{n+1}$ h) $a_n = 2^{3-n}$ i) $a_n = 4n - 3$ j) $a_n = \frac{n-1}{n}$

k) $a_n = 2^n$ ℓ) $a_n = \frac{n^2+1}{n}$ m) $a_n = \frac{n}{n+1}$

12. Escribir los siguientes tres términos de cada sucesión:

a) 2, 4, 8, 16, 32, ... b) 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

d) –1, 1, -1, 1, -1, ... e) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ f) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

g) $\frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, 4, \frac{25}{4}, \ldots$ h) 1, 3, 5, 7, 9, ...

Respuestas

a) 64, 128 y 256 b) 15, 17 y 19 c) 1/6, 1/7, 1/8 d) 1, -1, 1 e) 1/81, 1/243, 1/729

f) 1/16, -1/32, 1/64 g) 9, 49/4, 16 h) 11, 13, 15

9.3 Progresiones aritméticas o sucesiones aritméticas.

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales tal que cada término, excepto el primero, se obtiene sumando al anterior una cantidad constante llamada **razón** o **diferencia**, que se representa por d.

Son progresiones aritméticas:

- Los múltiplos de números pares: 2, 4, 6, 8, 10, ... :La diferencia es d = 2
- Los múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... :La diferencias d = 3
- Los múltiplos de a: a, 2a, 3a, 4a, 5a, ... :La diferencia es d = a
- La sucesión –10, -6, -2, 2, 6, ... :La diferencia es d = 4.
- La sucesión 3, 7, 11, 15, 19, 23, ... :La diferencia es d = 4

Si **d > 0**, la progresión es creciente. Cada término es mayor que el precedente. Todos los ejemplos anteriores tienen d > 0.
Si **d < 0**, la progresión es decreciente. Cada término es menor que el precedente. La progresión 12, 10, 8, 6, 4, 2 es decreciente con d = -2.
Si **d = 0**, la progresión es constante.

9.4 Termino n-ésimo de una progresión aritmética

Consideremos la progresión aritmética limitada $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$.
De acuerdo con la definición, cada término es igual al anterior más la razón o diferencia d.

$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

Generalizando para el término que ocupa el lugar n se obtiene el término general

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Si conocemos un término cualquiera a_m diferente del primero y además la razón o diferencia, es posible obtener el término enésimo a través de la relación siguiente:

$$\boxed{a_n = a_m + (n-m)\, d}$$

Problemas resueltos

Problema 1 En una progresión aritmética se tiene que $a_{11} = 35$ y la diferencia $d = 4$, hallar el primer término.

Solución

De acuerdo con la definición puede escribirse que:

$$a_{11} = a_1 + (n-1)\, d$$

Como $a_{11} = 35$, $n = 11$ y $d = 4$ se tendrá que:

$$35 = a_1 + (11-1)\, 4$$
$$35 = a_1 + 40$$
$$a_1 = 35 - 40$$
$$\mathbf{a_1 = -5}$$

Problema 2 En una progresión aritmética el término $a_5 = 19$ y la diferencia es $d = 3$. Escribir los seis primeros términos de la progresión.

Solución

$a_n = a_1 + (n-1)\, d$

Como $a_5 = 19$, $d = 3$ y $n = 5$ se tendrá que $19 = a_1 + (5-1)\, 4$

$$19 = a_1 + 16$$
$$a_1 = 3$$

Luego se tendrá que:

$a_2 = a_1 + d = 3 + 4 = 7$
$a_3 = a_1 + 2d = 3 + 2.3 = 3 + 6 = 9$
$a_4 = a_1 + 3d = 3 + 3.3 = 3 + 9 = 12$
$a_5 = a_1 + 4d = 3 + 4.3 = 3 + 12 = 15$
$a_6 = a_1 + 5d = 3 + 5.3 = 3 + 15 = 18$

$$\to \left(\begin{array}{ll} a_1 = 3 & a_4 = 12 \\ a_2 = 7 & a_5 = 15 \\ a_3 = 9 & a_6 = 18 \end{array} \right)$$

Problema 3 El quinto término de una progresión aritmética es 19. Si la razón es 4, calcular el octavo término.

Solución

Datos
$a_5 = 19$
$d = 4$
$a_8 = ?$

Determinemos a_1 usando la ecuación $a_n = a_1 + (n - 1)d$

Sustituyendo por $n = 5$ se tendrá que:

$a_5 = a_1 + (5 - 1)$

$a_5 = a_1 + 4d$

$19 = a_1 + 4.4$

$19 = a_1 + 16$

$a_1 = 3$

Usemos nuevamente la ecuación $a_n = a_1 + (n - 1)\,d$ para calcular a_8. En este caso $n = 8$ y $a_1 = 3$.

$$a_8 = a_1 + (8 - 1)\,d \longrightarrow a_8 = 3 + 7.4 \longrightarrow a_8 = 3 + 28 \longrightarrow \mathbf{a_8 = 31}$$

Problema 4 El tercer término de una progresión aritmética es 8 y el término 16 es 47. Hallar a_1 y d. Construye la progresión.

Solución

Como datos se tiene que $a_3 = 8$; $a_{16} = 47$. Las incógnitas son: $a_1 = ?$ y $d = ?$

Usemos la fórmula del último término siendo $a_n = a_3$ $\quad a_3 = a_1 + (3 - 1)\,d$

Sustituyendo por $a_3 = 8$ puede escribirse que:

$$8 = a_1 + 2\,d \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\text{I})$$

Usando nuevamente la fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)\,d$ con $a_n = a_{16}$ se tendrá que:

$$a_{16} = a_1 + (n - 1)\,d$$
$$47 = a_1 + 15\,d \;.\;.\;.\;.\;.\;(\text{II})$$

Uniendo las ecuaciones (I) y (II) nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 8 = a_1 + 2\,d \\ 47 = a_1 + 15\,d \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -8 = -a_1 - 2\,d \\ 47 = \;\; a_1 + 15\,d \end{cases}$$

$$39 = 13\,d \longrightarrow d = 3$$

Sustituyendo $d = 3$ en la ecuación $8 = a_1 + 2\,d$ se tendrá que:

$8 = a_1 + 6$ de donde $a_1 = 2$.

La progresión será: 2, 5, 7, 9, 11, 13, ...

Problema 5 En una progresión aritmética la suma del cuarto y el octavo término es 40; y la suma del séptimo y el décimo quinto es 70. Hallar la diferencia, (razón) y dichos términos.

Solución

De acuerdo con las condiciones del problema se tiene que:

$$\underbrace{a_4 + a_8 = 40}_{(A)} \qquad y \qquad \underbrace{a_7 + a_{15} = 70}_{(B)}$$

Escribiendo cada término en función del primero se tiene que:

$$\begin{aligned} a_4 &= a_1 + 3\,d \\ a_8 &= a_1 + 7\,d \\ a_7 &= a_1 + 6\,d \\ a_{15} &= a_1 + 14\,d \end{aligned}$$

Sustituyendo a_4, a_8, a_7 y a_{15} en las expresiones (A) y (B) se tiene que:

$$\begin{array}{lcl} a_1 + 3\,d + a_1 + 7\,d = 40 & \longrightarrow & \\ a_1 + 6\,d + a_1 + 14\,d = 70 & \longrightarrow & \end{array} \left\{\begin{array}{l} 2\,a_1 + 10\,d = 40 \\ 2\,a_1 + 20\,d = 70 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{r} -2\,a_1 - 10\,d = -40 \\ \underline{2\,a_1 + 20\,d = 70} \\ 10\,d = 30 \end{array}\right.$$

Despejando d nos queda que d = 3
Hemos resuelto el sistema de ecuaciones usando el método de reducción.
Sustituyendo d = 3 en la segunda ecuación del sistema se tiene que:

$$2\,a_1 + 20\,.\,3 = 70 \longrightarrow 2\,a_1 + 60 = 70 \longrightarrow 2\,a_1 = 70 - 60 \longrightarrow 2\,a_1 = 10 \longrightarrow \mathbf{a_1 = 5}$$

Una vez conocido el valor de a_1 calculamos cada uno de los términos pedidos:

$$\left.\begin{array}{l} a_4 = a_1 + 4\,d \\ a_4 = 5 + 9 \\ \mathbf{a_4 = 14} \\ \\ a_8 = a_1 + 7\,d \\ a_8 = 5 + 7.3 \\ a_8 = 5 + 21 \\ \mathbf{a_8 = 26} \end{array}\right] \longrightarrow \left(\begin{array}{l} a_7 = a_1 + 6\,d \\ a_7 = 5 + 6\,.\,3 \\ a_7 = 5 + 18 \\ \mathbf{a_7 = 23} \\ \\ a_{15} = a_1 + 14\,d \\ a_{15} = 5 + 14\,.\,3 \\ a_{15} = 5 + 42 \\ \mathbf{a_{15} = 47} \end{array}\right)$$

Problema 6 Una progresión aritmética de diferencia (razón) 1/3 consta de 10 términos. Si los extremos suman 13, hallar el primero y último términos.

Solución

Datos e incógnitas

$d = 1/3$

$n = 10$

$a_1 + a_n = 13 \ldots\ldots (\mathbf{I})$

$a_1 = ?$

$a_n = ?$

Con los datos d = 1/3 y n = 10 formamos la ecuación

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$a_n - a_1 = (10-1)\,d$

$a_n - a_1 = 9\,.\,1/3$

$a_n - a_1 = 3 \ldots\ldots\ldots (\mathbf{II})$

Con las ecuaciones (**I**) y (**II**) formamos un sistema de ecuaciones con dos incógnitas y resolvemos el sistema por el método de reducción:

$$\begin{cases} a_1 + a_n = 13 \\ -a_1 + a_n = 3 \end{cases}$$

$$2\,a_n = 16$$

$$\mathbf{a_n = 8}$$

Sustituyendo por $a_n = 8$ en la primera ecuación del sistema se tiene que:

$a_1 + 8 = 13$

$a_1 = 18 - 8$

$\mathbf{a_1 = 5}$

Luego se tendrá que $\mathbf{a_1 = 5}$ y $\mathbf{a_n = 8}$

Problema 7 Interpolar 6 medios aritméticos entre –1 y 3.

Solución

Interpolar un determinado número de términos, entre dos números dados, es entendido como el proceso mediante el cual se debe encontrar una progresión aritmética donde son conocidos el primer y último términos.

En nuestro caso se tendrá que: $-1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 3$

$n = 6 + 2 = 8$

$a_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; a_n$

Se tendrá luego que $a_1 = -1$ $a_n = 3$ y $n = 8$. Debemos determinar la razón d.

Usemos la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)\,d$.

Sustituyendo a_1, a_n y n por sus valores se tendrá que: $3 = -1 + (8-1)\,d$

$$3 + 1 = 7\,d$$

$$4 = 7\,d$$

$$\mathbf{d = 4/7}$$

Luego la progresión pedida será: $a_1 = \mathbf{-1}$ $\quad a_2 = -1 + \frac{4}{7} = -\frac{3}{7}$ $\quad a_3 = -\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$

$a_4 = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} = \frac{5}{7}$ $\quad a_5 = \frac{5}{7} + \frac{4}{7} = \frac{9}{7}$ $\quad a_6 = \frac{9}{7} + \frac{4}{7} = \frac{13}{7}$ $\quad a_7 = \frac{13}{7} + \frac{4}{7} = \frac{17}{7}$

- 1, - 3/7, 1/7, 5/7, 9/7, 13/7, 17/7

Problema 8 La suma de tres números en progresión aritmética es 42 y la de sus cuadrados es 620. Determinar los números.

Solución

De acuerdo con las condiciones del problema deben verificarse dos cosas:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 42 \;\ldots\ldots\; (\mathrm{I})$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 620 \;\ldots\ldots\; (\mathrm{II})$$

Tratemos de escribir las ecuaciones en función del término a_2:

$$a_1 = a_2 - d \quad \text{y} \quad a_3 = a_2 + d.$$

Sustituyendo éstas expresiones en la primera y segunda ecuación se tendrá que:

Primera ecuación

$a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 42$

$3\,a_2 = 42$

$\mathbf{a_2 = 14}$

Segunda ecuación

$(a_2 - d)^2 + a_2^2 + (a_2 + d)^2 = 620$

$a_2^2 - 2\,a_2\,d + d^2 + a_2^2 + 2\,a_2\,d + d^2 = 620$

$3\,a_2^2 + 2\,d^2 = 620 \;\ldots\ldots\; (\mathrm{I})$

Sustituyendo $a_2 = 14$ en la expresión (I) se tiene que:

$3\,.\,(14)^2 + 2\,d^2 = 620$

$588 + 2\,d^2 = 620 \longrightarrow 2\,d^2 = 32 \longrightarrow d^2 = 16$

$d = \pm 4$ de donde $d_1 = 4$ y $d_2 = -4$

Para $d_1 = 4$ sustituimos en $a_1 = a_2 - d$ y $a_3 = a_2 + d$ quedándonos que:

$a_1 = 14 - 4$

$\mathbf{a_1 = 10}$

$a_3 = 14 + 4$

$\mathbf{a_3 = 18}$

Para $d_2 = -4$ sustituimos en $a_1 = a_2 - d$ y en $a_3 = a_2 + d$ quedándonos que:

$a_1 = 14 + (-4) = 14 + 4$

$a_1 = 18$

$a_3 = 14 - 4$

$a_3 = 10$

Luego la progresión será: 10, 14, 18 o 18, 14, 10

9.5 Suma de los términos de una progresión aritmética

Consideremos la suma de n términos de una progresión aritmética:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

La expresión anterior la podemos escribir así:

$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) \ldots\ldots + (a_n - 2r) + (a_n - r) + a_n \quad \ldots (I)$

Si invertimos la igualdad (I) se tendrá que:

$S_n = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + \ldots\ldots (a_1 + 2r) + (a_1 + r) + a_1 \ldots\ldots (II)$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (I) y (II) se tiene:

$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) \ldots\ldots + (a_n - 2r) + (a_n - r) + a_n$

$S_n = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + \ldots\ldots (a_1 + 2r) + (a_1 + r) + a_1$

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$

$2S_n = (a_1 + a_n)\,n$ (por ser n el número de términos)

Despejando S_n se obtiene:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

Problemas resueltos

Problema 1 Dada la progresión aritmética 7, 13, 19, ... , 721 determinar la suma de los términos.

Solución

La suma de los términos de una progresión aritmética se calcula usando la expresión siguiente:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Como conocemos $a_1 = 7$; $a_n = 721$ y la diferencia $d = 6$, determinamos el número de términos de la progresión usando la expresión

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

Sustituyendo por los valores conocidos tendremos que:

$721 = 7 + (n - 1)\,6$

$721 - 7 = (n - 1)\,6$

$714 = (n - 1)\,6$

$n - 1 = \frac{714}{6}$

$n = 119 + 1$

$\mathbf{n = 120}$

Sustituyendo por $n = 120$; $a_1 = 7$ y $a_n = 721$ en la expresión de la suma tendremos que:

$S_n = \frac{(7 + 721)120}{2}$

$S_n = \frac{728.120}{2}$

$\mathbf{S_n = 43680}$

Problema 2 Calcular la suma de los 21 primeros múltiplos de 9.

Solución

El primer múltiplo de 9 es indudablemente el mismo 9, por lo que $a_1 = 9$

La progresión ha de tener 21 términos, indicándonos que n = 21 y la razón o diferencia ha de ser 9.

Determinemos a_{21} usando la fórmula $a_n = a_1 + (n - 1) d$. En la columna de la izquierda.

$a_{21} = 9 + (21 - 1) 9$

$a_{21} = 9 + 20 . 9$

$a_{21} = 9 + 180$

$\mathbf{a_{21} = 189}$

La suma de los primeros 21 múltiplos de 9 vendrán dados por la fórmula siguiente:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_{21} = \frac{(9+189)21}{2} = \frac{198.21}{2} = 2079$$

$\mathbf{S_{21} = 2079}$

Problema 3 ¿Cuál es la razón de una progresión aritmética en la cual la suma de los seis primeros términos es 93 y el último término es igual a 23.

Solución

Datos e incógnitas

$d = ?$

$S_6 = 93$

$a_n = 23$

$n = 6$

Partimos de la ecuación $a_n = a_1 + (n - 1) d$ y despejamos a_1

$a_1 = a_n - (n - 1) d$

Sustituyendo por sus valores se tiene que: $a_1 = 23 - (6 - 1) d$

$a_1 = 23 - 5 d$ . . . . . . (I)

Sustituyendo la expresión (I) y $S_n = 93$ en la fórmula

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) n}{2}$ se tiene que:

$$93 = \frac{(46 - 5 d) 6}{2} \quad . . . . . . (I)$$

Resolviendo la ecuación de la expresión (I) se tiene que:

$$\frac{186}{6} = 46 - 5 d \longrightarrow 31 = 46 - 5 d \longrightarrow 5 d = 15 \longrightarrow \boxed{d = 3}$$

Problema 4 Calcular la suma de los múltiplos de 7 comprendidos entre 100 y 200

Solución

El primer múltiplo de 7 mayor que 100 es 105, teniéndose que $a_1 = 105$

El múltiplo de 7 inmediatamente menor a 200 es 196, teniéndose que $a_n = 196$.

Calculemos el número de términos despejando n de la expresión $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \longrightarrow a_n - a_1 = (n-1)d \longrightarrow \frac{a_n - a_1}{d} = n - 1 \longrightarrow n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

Sustituyendo a_n, a_1 y d por sus valores se tiene que $n = \frac{196 - 105}{7} + 1 \longrightarrow$ $\mathbf{n = 14}$

Apliquemos la fórmula de la suma:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(105 + 196)14}{2}$$

$$\mathbf{S_n = 2107}$$

Problema 5 La suma de los n términos de una progresión aritmética es – 60; la diferencia es – 2 y el último término es – 18. Determinar a_1 y n.

Solución

Datos e incógnitas

$S_n = -60$

$d = -2$

$a_n = -18$

$a_1 = ?$

$n = ?$

En la ecuación $a_n = a_1 + (n-1)d$ sustituimos a_n y d por sus valores

$-18 = a_1 + (n-1)(-2)$

$-18 = a_1 - 2n + 2$

$-18 - 2 = a_1 - 2n$

$a_1 - 2n = -20 \;....(\mathrm{I})$

Por otro lado sabemos que $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

Sustituyendo se tiene que $-60 = \frac{(a_1 - 18)n}{2}$

$-120 = (a_1 - 18)n \;......(\mathrm{II})$

Despejando a_1 de la ecuación (**I**) se tiene que $a_1 = -20 + 2n$.

Sustituyendo a_1 en la expresión (**II**) se tendrá que:

$-120 = [-20 + 2n - 18]n$

$-120 = (-38 + 2n)n$ (Desarrollando los términos dentro del corchete)

$-120 = 38n + 2n^2$ (Aplicando la propiedad distributiva)

$2n^2 - 38n + 120 = 0$ (Ordenando e igualando a cero)

$n^2 - 19n + 60 = 0$ (Simplificando por 2)

$(n-15)(n-4) = 0$ (factorizando)

$n - 15 = 0$ y $n - 4 = 0$ (Si a.b = 0 entonces a = 0 y b = 0)

$n = 15$ y $n = 4$ (Despejando n en cada caso)

Sustituyendo n = 15 en $a_1 = -20 + 2n$ se tiene que: $a_1 = -20 + 30$. De donde $\mathbf{a_1 = 10}$

Sustituyendo n = 4 en $a_1 = -20 + 2n$ se tiene que: $a_1 = -20 + 8$. De donde $\mathbf{a_1 = -12}$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. El décimo término de una progresión aritmética es 20 y el décimo sexto término es 32. ¿Cuál es la diferencia o razón y el primer término? **R**: $d = 2$ y $a_1 = 2$.

2. En una progresión aritmética el primer término excede en 2 del término 9. Sabiendo que el primero y el noveno suman 5, hallar la razón o diferencia y los términos mencionados.

R: $d = 1$ $a_1 = -3/2$ $a_9 = 13/2$ $a_{11} = 17/2$.

3. El primer término de una progresión aritmética es 1. Si la razón o diferencia es 2/3 y el último término es 41, ¿cuántos términos tiene la progresión?. **R**: 61.

4. Interpolar 8 medios aritméticos entre los términos 1/2 y – 7!0.

R: 11/30, 7/30, 1/10, - 1/30, - 1/6, - 3/10, - 13/30, - 17/30.

5. Tres números en progresión aritmética creciente suman 24 y la suma de sus cuadrados es 200. Determinar los números. **R**: 6, 8 y 10.

6. En una progresión aritmética creciente que consta de 8 términos la suma de los cuatro términos centrales es 70 y el producto del primero con el último es 196. Hallar la progresión.

R: 7, 10, 13, ... , 28.

7. El producto del tercero y sexto términos de una progresión aritmética es 81. Sabiendo que la razón o diferencia es 4, hallar la progresión.

R: $-14+3\sqrt{13}$ . . . . . $6+3\sqrt{13}$ $\qquad$ $-14-3\sqrt{13}$ .... $6-3\sqrt{13}$

Sugerencia: escribir $a_3 = a_1 + 2d$ y $a_6 = a_1 + 5d$.

8. En una progresión aritmética se tiene que $a_4 = 2$ y $a_{12} = 27$. Hallar a_1 **R**: - 59/8.

9. Un corredor avanza en el primer segundo de su carrera 8 m y en cada segundo posterior avanza una longitud 35 cm más que en el anterior. ¿Cuánto ha avanzado en el séptimo segundo?. **R**: 13,6 m.

10. Hallar los ángulos internos de un triángulo sabiendo que están en progresión aritmética de razón o diferencia igual a 10. **R**: 50°, 60°, 70°.

11. Hallar la suma de los quince primeros términos de la progresión 5/4, 11/4, ...

R: 705/4.

12. Calcular la suma de los 80 primeros múltiplos de 5. **R**: 16.200.

13. La suma de los seis primeros términos de una progresión aritmética es 51 y el último término es igual a 16. ¿Cuál es la razón?. **R**: 3.

14. La suma de los nueve primeros términos de una progresión aritmética es 90 y la razón o diferencia es –4. Determinar el primero y el último término. **R**: $a_1 = 26$, $a_n = -6$.

15. Calcular la suma de los primeros 40 números impares de tres cifras **R**: 5.600

16. ¿Qué valor debe tener x para que $x + 1$; $x^2 + 4$ y $2x^2 + 3$ sean tres términos consecutivos de una progresión aritmética. Si $x + 1$ es el cuarto término de dicha progresión, hallar la suma de los doce primeros términos. **R**: $x = 4$; $S = 510$.

17. Calcular la suma de los 60 primeros términos de una progresión aritmética cuyo décimo término es 44 y el término de lugar 18 es 76. **R**: 7.560.

18. Hallar la suma de todos los números pares comprendidos entre 98 y 1002. **R**: 248.050

19. En una progresión aritmética la suma de los dos primeros términos es 4 y el sexto término es igual a 38. Formar la progresión. **R**: 2, 6, 14, ...

20. En una progresión aritmética se verifica que $a_3 + a_6 = 4$ y $a_5 + a_9 = 6$. Hallar a_3, a_5, a_6, y a_9.
R: $a_3 = 1{,}4$ $a_5 = 2{,}2$ $a_6 = 2{,}6$ $a_9 = 3{,}8$.

21. La suma de los cinco primeros términos de una progresión aritmética creciente es 50 y el producto de ellos es 30.240. Formar la progresión. **R:** 2, 6, 10, 14, 18

22. Cada oscilación de un péndulo es 7,5 cm menor que la anterior. Si la primera oscilación es 244 cm, calcular la longitud de la décima segunda oscilación y determinar la distancia recorrida por el péndulo durante las primeras 12 oscilaciones. **R:** 160,125 cm y 2424,75 cm.

23. Un cuerpo cae 488 cm durante el primer segundo, 1464 cm el segundo segundo, 2440 cm durante el tercer segundo y así sucesivamente. ¿Cuántos cm cae en su décimo segundo?. ¿Qué distancia cayó en total durante los primeros 10 segundos?. **R:** 9272 cm y 48.800 cm.

24. Un jardinero debe regar con un recipiente de agua cada uno de los 30 árboles que hay a un lado del camino. Los árboles distan entre sí 6 m y el pozo está a 10 m del primer árbol. ¿Qué distancia habrá recorrido el jardinero después de haber terminado el riego y vuelto el recipiente al pozo?. **R:** 5.820 m.

25. Una persona compra a plazos un artefacto eléctrico. El primer mes paga 22000 Bs., el segundo 20.000 Bs.,, el tercero 18.000 Bs., hasta el último mes que cancela 4.000 Bs., con lo que el artefacto queda totalmente cancelado. ¿Cuántos meses han sido necesarios para cancelarlo?.

R: 10 meses.

9.6 Progresiones geométricas.

Una progresión geométrica es una sucesión de números reales tal que cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante llamada **razón**.

Son ejemplos de progresiones geométricas las siguientes:

2, 6, 18, 54, 162, ... El primer término es 2 y la razón es 3.

3, 1, 1/3, 1/9, 1/27, ... El primer término es 3 y la razón es 1/3.

- 10, - 40, -160, - 640, ...El primer término es – 10 y la razón es 4.

La razón de cualquier progresión geométrica puede determinarse dividiendo cualquier término, excepto el primero, entre el término anterior. De acuerdo a esto, el cociente de dos términos consecutivos es una constante fija llamada **razón.**

9.7 Cálculo del término n-ésimo de una progresión geométrica

Si se designa por a_1 el primer término y por r la razón, se puede escribir de acuerdo con la definición:

$a_1,\ a_1 . r,\ a_1 . r^2,\ a_1 . r^3,\ a_1 . r^4, \ldots\ldots$

El término que ocupa el lugar n tendrá por expresión

$$\boxed{a_n = a_1 . r^{n-1}}$$

Esta representa la expresión del término n-ésimo de una progresión geométrica

Ejemplo 1

El término que ocupa el lugar 20 de la progresión 2, 6, 18, 54, 162, ... es

$$a_{20} = 2 \,.\, 3^{20-1} = 2 \,.\, 3^{19}$$

$$a_{20} = 2324522934$$

Nótese que la razón la podemos obtener dividiendo un término cualquiera entre el anterior.

Ejemplo 2

Se tiene una progresión geométrica donde $a_2 = 24$ y $a_5 = 648$. Determinar d y a_1.

Solución

La progresión será: -------, 24, -------, --------, 648.

Debemos considerar una progresión geométrica a partir del segundo término, para lo cual se tendrá que $a_1 = 24$, $a_n = 648$ y $n = 4$. Esto nos permite obtener la razón de la progresión.

Para ello utilizaremos la fórmula $a_n = a_1 \,.\, r^{n-1}$

Sustituyendo en la fórmula se tiene que: $648 = 24 \,.\, r^{4-1}$ $648 = 24 \,.\, r^3$ Despejando r^3 tendremos que: $r^3 = 648/24 = 27$ $r = \sqrt[3]{27}$ $\mathbf{r = 3}$	Conocida la razón usamos nuevamente la expresión $a_n = a_1 \,.\, r^{n-1}$ con $a_n = 648$, $r = 3$. $648 = a_1 \,.\, 3^{5-1}$ $648 = a_1 \,.\, 3^4$ $648 = a_1 \,.\, 81$ $a_1 = 648/81$ $\mathbf{a_1 = 8}$

9.8 Suma de los términos de una progresión geométrica

La suma de los primeros n términos, S_n, de una progresión geométrica se puede escribir como:

$S_n = a_1 + a_1 \,.\, r + a_1 \,.\, r^2 + a_1 \,.\, r^3 + a_1 + \ldots\ldots + a_1 \,.\, r^{n-1}$. .... (I).

Si en la expresión anterior multiplicamos ambos miembros por r tenemos que:

$r\,S_n = a_1 \,.\, r + a_1 \,.\, r^2 + a_1 \,.\, r^3 + a_1 \,.\, r^4 + a_1 + \ldots\ldots + a_1 \,.\, r^n$ ....(II)

Restemos miembro a miembro la ecuación (I) menos la ecuación (II)

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_1 \,.\, r + a_1 \,.\, r^2 + a_1 \,.\, r^3 + a_1 + \ldots\ldots + a_1 \,.\, r^{n-1} \\ \underline{r\,S_n = a_1 \,.\, r + a_1 \,.\, r^2 + a_1 \,.\, r^3 + a_1 \,.\, r^4 + a_1 + \ldots\ldots + a_1 \,.\, r^n} \\ S_n - r\,S_n = a_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -a_1 \,.\, r^n \end{array}$$

$$S_n - r\,S_n = a_1 - a_1 \,.\, r^n$$

Si en la expresión anterior tomamos factor común S_n en el primer miembro y a_1 en el segundo miembro se tiene que:

$$S_n(1 - r) = a_1(1 - r^n)$$

Al despejar S_n nos queda la ecuación: $\boxed{S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}}$

Problemas resueltos

Problema 1 En una progresión geométrica se tiene que $S_n = 93$, $a_1 = 3$ y $r = 2$. Determinar n.

Solución

Sabemos que la ecuación viene dada por $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$, en la cual sustituimos S_n, a_1 y r por sus valores y despejamos n

$$93 = \frac{3(1-2^n)}{1-2} \longrightarrow 93 = \frac{3(1-2^n)}{-1} \longrightarrow -93 = 3(1 - 2^n) \longrightarrow -93/3 = 1 - 2^n$$

$$2^n = 1 + 31 \longrightarrow 2^n = 32 \longrightarrow 2^n = 2^5 \longrightarrow \mathbf{n = 5}$$

Problema 2 En la descomposición de una sustancia se pierde 20% de su peso cada hora. Sabiendo que la cantidad original de sustancia era de 300 gramos, ¿cuánto queda después de 7 horas?.

Solución

Nótese, de acuerdo con el enunciado del problema, que la sustancia está disminuyendo en cada hora un porcentaje o razón.

Aquí nos están pidiendo determinar la cantidad de sustancia restante, por lo que la razón vendría dada así: 100% - 20% = 80% o 0,80.

Esta razón nos indica que para obtener los términos de la progresión debemos multiplicar cada término por 0,80.

Primera hora: $a_1 = 300$	Luego $a_n = 300 \cdot (0,8)^{n-1}$
Segunda hora: $a_2 = 300 \cdot 0,80$	$a_n = 300 \cdot (0,8)^{8-1}$
Tercera hora: $a_3 = 300 \cdot (0,80)^2$	$a_n = 300 \cdot 0,8^7$
Cuarta hora: $a_4 = 300 \cdot (0,80)^3$	$a_n = 300 \cdot 0,2097$
	$a_n = 62,91$ gramos

Nótese que hemos utilizado n = 8, porque la cantidad restante luego de 7 horas es igual a la cantidad restante al inicio de la octava hora.

Problema 3 Interpolar 4 medios geométricos entre – 2 y – 64/243.

Solución

Aquí se trata de una progresión geométrica, donde conocemos el primero y último términos, por lo cual debemos determinar la razón de la progresión.
Para ello usamos la expresión $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

$$-2,\ \underbrace{\text{-----},\ \text{-----},\ \text{-----},\ \text{-----},}_{4\ \text{términos}}\ -64/243$$

El número de términos de la progresión ha de ser n = 6

Para determinar la razón despejamos r de la expresión $a_n = a \cdot r^{n-1}$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

$$r = \sqrt[6-1]{\frac{-\frac{64}{243}}{-2}} = \sqrt[5]{\frac{64}{486}} = \sqrt[5]{\frac{2^5.2}{3^5.2}}$$

$$r = \frac{2}{3}$$

Encontremos cada uno de los términos de la progresión:

$a_1 = -2$

$$a_2 = a_1 \cdot r = (-2)\cdot\frac{2}{3} = -4/3$$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 = (-2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 = (-2)\cdot\frac{4}{9} = -\frac{8}{9}$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = -\frac{8}{9}\cdot\frac{2}{3} = -\frac{16}{27}$$

$$a_5 = a_4 \cdot r = -\frac{16}{27}\cdot\frac{2}{3} = -\frac{32}{81}$$

Problema 4 Se tiene una progresión geométrica donde $a_1 = 6$, $a_n = 1536$ y $S_n = 1026$. Hallar la razón y el número de términos.

Solución

Conocemos la expresión del término n-ésimo de una progresión geométrica, el cual viene dado por la expresión

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Como $a_n = 1536$ y $a_1 = 6$ tendremos, al sustituir, que:

$$1536 = 6 \cdot r^{n-1}$$

Si de la expresión anterior despejamos r^{n-1}, nos queda que:

$$r^{n-1} = \frac{1536}{6}$$

$$r^{n-1} = 256 \text{ .... (I)}$$

Por otro lado, sabemos que $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

Sustituyendo por $S_n = 1026$; $a_1 = 6$ se tendrá que:

$$1026 = \frac{6(1-r^n)}{1-r}$$

$$\frac{1026}{6} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$171\,(1-r) = 1 - r^n$$

$$171 - 171\,r = 1 - r^n$$

$$r^n = 1 - 171 + 171\,r$$

$$r^n = -170 + 171\,r \;......(\,\text{II}\,)$$

Dividiendo miembro a miembro la expresión (II) entre la expresión (I) se tiene que:

$$\frac{r^n}{r^{n-1}} = \frac{-170+171\,r}{256} \longrightarrow r = \frac{-170+171\,r}{256}$$

$$256\,r = -170 + 171\,r \longrightarrow 256\,r - 171\,r = -170$$

$$85\,r = -170 \longrightarrow r = -\frac{170}{85}$$

$$\mathbf{r = -2}$$

Sustituyendo r = - 2 en la expresión (I) se tendrá que:

$(-2)^{n-1} = 256$

$(-2)^{n-1} = (-2)^8$ (descomponiendo 256 en potencias de base – 2)

$n - 1 = 8$ (igualando las potencias de igual base)

$n = 8 + 1$ (despejando n)

$\mathbf{n = 9}$

Problema 4 La suma de los tres primeros términos de una progresión geométrica es 26 y la suma de los seis primeros es 728. Hallar la suma de los nueve primeros términos.

Solución

De acuerdo con las condiciones del problema podemos escribir dos cosas

$a_1 + a_2 + a_3 = 26$ ....(I) y $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 728$ ....(II)

Sustituyendo la primera condición en la segunda podemos escribir que:

$26 + a_4 + a_5 + a_6 = 728$

$a_4 + a_5 + a_6 = 728 - 26$

$a_4 + a_5 + a_6 = 702$ ....(III)

En las expresiones (I) y (III) escribimos todos los términos en función del primero

Para la expresión (I)

$a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 = 26$

Tomando factor común a_1 nos queda que:

$a_1\,(1 + r + r^2) = 26$ ....(I V)

Para la expresión (II)

$a_1 \cdot r^3 + a_1 \cdot r^4 + a_1 \cdot r^5 = 702$

Tomando como factor común $a_1.r^3$ nos queda:

$a_1\,r^3\,(1 + r + r^2) = 720$.....(V)

Dividiendo miembro a miembro la expresión (V) entre la expresión (IV) tiene que:

$$\frac{a_1r^3(1+r+r^2)}{a_1(1+r+r^2)} = \frac{702}{26} \longrightarrow r^3 = 27 \longrightarrow r = \sqrt[3]{27} \longrightarrow \mathbf{r = 3}$$

Sustituyendo r = 3 en la expresión $a_1 (1 + r + r^2) = 26$ se tiene que:

$$a_1 (1 + 3 + 9) = 26 \longrightarrow 13 a_1 = 26. \longrightarrow a_1 = 26/13 \longrightarrow \mathbf{a_1 = 2}$$

Luego la suma de los nueve primeros términos vendrá dado por la expresión: $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

Sustituyendo por sus valores obtenemos:

$$S_9 = \frac{2(1-3^9)}{1-3} = \frac{2(1-19683)}{-2} = 19682$$

$$\mathbf{S_9 = 19682}$$

ACTIVIDADES PARA RESOLVER

1. En una progresión geométrica se tiene que $a_3 = 28$ y $a_5 = 112$. Determinar r y a_1.

   R: r = 2; $a_1 = 7$ r = -2; $a_1 = 7$

2. Interpolar dos medios geométricos entre 1/5 y 4/10

   R: 1/5, 1/10, 1/20, 1/40.

3. En una progresión geométrica se tiene que $a_2 = 15$ y $a_5 = 405$. Determinar r y a_1.

   R: r = 3 $a_1 = 5$.

4. Una sustancia pierde la mitad de su masa cada día. Si inicialmente existen 300 gramos de la sustancia, determinar: a) El número de días después de los cuales sólo restan 37,5 gramos de la sustancia. b) La cantidad de sustancia restante después de 8 días. **R:** 3 días y 1,172 gramos.

5. La población de un país es de 260 millones de habitantes. Si la población crece a razón de 5,5% al año, determinar: a) La población dentro de 12 años. b) El número de años necesarios para que se duplique la población. **R:** a) 494,31 millones b) 13,9 años

6. Se tiene una progresión geométrica donde $a_1 = 18$, r = 3. Calcular a_7. **R:** 13.122.

7. En una progresión geométrica se tiene que $a_1 = 2$ y r = 1/2. Calcular a_8. **R:** 1/64

8. En una progresión geométrica son conocidos $a_1 = 243$; $a_n = 32$; $S_n = 665$. Partiendo de estos datos calcula la razón y el número de términos de la progresión. **R:** r = 2/3 n = 6

Actividades complementarias

1. Se da la sucesión siguiente: $a_n = \frac{2n+1}{2 \cdot 3^{n-1}}$. Calcular $a_1 + a_3$ **R** : 17/9

2. Dos términos consecutivos de una progresión aritmética son $a_4 = -x + 9y$ $a_5 = -2x + 11y$. Calcular el primero y sexto término de dicha progresión **R:** $a_1 = 2x + 3y$ $a_6 = -3x + 13y$

3. Cuatro números naturales en progresión geométrica son tales que los dos primeros suman 12 y los dos últimos 300. ¿Cuáles son esos números?. **R:** 2, 10, 50 y 250

4. En una progresión aritmética se cumple que $3a_6 - a_3 = -9$ y $(a_4)^2 + a_2 = 204$. Encontrar la razón y el octavo término. **R:** - 3 y - 3

5. Los términos quinto y noveno de una progresión geométrica valen $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}/4$, respectivamente. Hallar el valor de la razón y la suma de los diez primero términos.

R: $r = 1/\sqrt{2}$ y $S = \frac{31(1+\sqrt{2})}{4}$

6. ¿Cuál es el número de términos de una progresión aritmética cuya razón o diferencia es 3/2, el último término es 38 y la suma de todos ellos es 500?. **R:** n = 25

7. Interpolar 4 medios geométricos entre $\frac{2}{\sqrt{3}}$ y 2/27 **R:** 2/3, $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, 2/9 $\frac{2\sqrt{3}}{27}$

8. En una progresión geométrica se tiene que $a_2 = 24$ y $a_5 = 248$. Determinar la razón y el primer término de la progresión. **R:** $r = 3$ y $a_1 = 8$

9. Una progresión geométrica, que consta de tres términos, es tal que la suma de dichos términos es 133. Si el primer término es 1, ¿cuál es la razón?. **R:** -12 y 11

10. Se tiene una progresión geométrica cuyo primer término es 4, el último es 62500 y la suma de todos los términos es 78124. ¿Cuántos términos tiene la progresión y cuál es la razón?.

R: r = 5 n = 7

11. En una progresión geométrica se tiene que $S_n = 93$, $a_1 = 3$ y $r = 2$. Determinar n **R:** n = 5

Notas históricas

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) el más grande de los matemáticos, además de astrónomo y físico, a la edad de 3 años se dice que descubrió un error al oír la liquidación del salario de su padre.

Más tarde, a los 18 años fue capaz de inventar los mínimos cuadrados y a la edad de 19 años resolvió un famoso problema que llevaba dos mil años sin solución. Construyó un polígono regular de 17 lados, de acuerdo con las normas euclídeas. Dos mil años antes se hacía con regla y compás un triángulo equilátero, un cuadrado y un pentágono regular, más no así polígonos regulares con un número de lados que fuera un número primo mayor que 5.

En 1799 defiende ante la institución universitaria de Gotinga (Alemania) **el teorema fundamental del álgebra.** Este establece que cualquier ecuación polinómica de grado n, con coeficientes reales o complejos tendrá n soluciones, algunas de las cuales pueden ser múltiples, complejas.

Su tesis, en la que optaba al doctorado, considerada entre las más importantes de todos los tiempos, la constituyó la primera demostración de este teorema, obteniendo una demostración puramente algebraica, ya que la demostración se fundamentaba inicialmente en puras consideraciones geométricas.

En el siglo XVIII, muchos matemáticos pensaban que este teorema era cierto pero en ningún momento habían sido capaces de demostrarlo.

Posteriormente, realizó algunos trabajos referentes a Cartografía, tales como la triangulación del reino de Hannover; y también fue capaz de perfeccionar algunos instrumentos geodésicos.

Sir Isaac Newton (1642-1727), con su gravitación universal y **Albert Einstein** (1879-1955) con su teoría de la relatividad son considerados las figuras más relevantes de la física.

Si se tendría que elegir el más genial de los dos, tal vez sería justo señalar al primero por una razón poderosa: mientras Einstein encontró hechas de antemano las matemáticas necesarias par formular su teoría de la relatividad, Newton tuvo que ingeniárselas él mismo.

Isaac Newton provino de una familia campesina en un pueblo al norte de Inglaterra (Woolsthorpe). Fue enviado a Cambridge para estudiar y una peste obligó a cerrar la universidad, lo que condujo a Newton a retirarse a su pueblo natal durante dos años. Este período es testigo del mayor flujo de ideas geniales que jamás mente alguna ha conocido: el cálculo infinitesimal, la ley de gravitación universal y la descomposición de la luz solar surgieron de aquel período fecundo.

Es más, a la hora de recordar los períodos breves más fecundos de la historia de la Ciencia en general, los nombres de Newton y Einstein vuelven a surgir con aspectos de colosos. Los artículos salidos de la mente de Einstein en unos pocos meses del año 1905 le valdrían su único premio Nóbel (efecto fotoeléctrico).

En 1669, Newton sustituyó en la cátedra a quien había sido su maestro, el excelente matemático Isaac Barrow. Ésta cátedra la ocupó hasta 1696 cuando pasó a la dirección de la Casa de la Moneda.

Resumen de fórmulas

FÓRMULAS DE ÁLGEBRA

Productos notables

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

La fórmula cuadrática

Si a es diferente de cero en la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, las soluciones vienen dadas por la ecuación:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exponentes

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Logaritmos

1. $\log_a x = y$ si y sólo si $x = a^y$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$
5. $\log_a a^n = n$
6. $\log_a a \,.\, 1$
7. $\log_a$
8. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
9. $\log_a \sqrt[r]{n} = \dfrac{\log_a n}{r}$

FÓRMULAS DE TRIGONOMETRÍA

Identidades fundamentales

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tag}^2 x$
3. $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$
4. $\operatorname{tag} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
5. $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$
6. $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$
7. $\operatorname{tag} x = \dfrac{1}{\cot x}$
8. $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

Identidades de sumas y diferencias

1. $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
2. $\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$
3. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
4. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
5. $\operatorname{tag}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tag} x + \operatorname{tag} y}{1 - \operatorname{tag} x \operatorname{tag} y}$
6. $\operatorname{tag}(x - y) = \dfrac{\operatorname{tag} x - \operatorname{tag} y}{1 + \operatorname{tag} x \operatorname{tag} y}$

Identidades para el ángulo doble

1. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
2. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
3. $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$
4. $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$
5. $\operatorname{tag} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tag} x}{1 - \operatorname{tag}^2 x}$
6. $\operatorname{tag}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

Módulo de un complejo

Sea el complejo **Z** = a + b i

El módulo será: $r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argumento de un complejo

$\tan \alpha = b/a \longrightarrow \alpha = \arctan b/a$

(tag α = b/a ⟶ α = arc tag b/a)

Forma binómica de un complejo

$$\mathbf{Z} = a + b\,i$$

Forma trigonométrica de un complejo

$$\mathbf{Z} = r\,(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

Forma polar de un número complejo

$$\mathbf{Z} = r \operatorname{cis} \alpha$$

Angulos notables

	cos	sen	tag	sec	csc	cot
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Progresiones aritméticas

a_1: primer término
a_n: último término
d: razón o diferencia
S_n: suma de n términos

Término n-ésimo

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d$$

Suma de n términos

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2}$$

Progresiones geométricas

Término n-ésimo

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Suma de n términos

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}}$$

Identidades para el ángulo medio

1. $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

2. $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

3. $\operatorname{tag}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

4. $\operatorname{tag}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$

5. $\operatorname{tag}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$

Identidades de suma y diferencia de seno y coseno

1. $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$

2. $\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\frac{A+B}{2}.\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$

3. $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$

4. $\cos A - \cos B = -\,2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}.\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$

Identidades del producto seno y coseno

1. $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)]$

2. $\cos A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)]$

3. $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

4. $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

Ley de los senos

$$\frac{A}{\operatorname{sen} A} = \frac{B}{\operatorname{sen} B} = \frac{C}{\operatorname{sen} C}$$

Ley de los cosenos

$C^2 = A^2 + B^2 - 2\,A\,C - \cos\,(A,B)$

Signos de las razones

	I	II	III	IV
seno	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tag	+	-	+	-
cot	+	-	+	-
sec	+	-	-	+
csc	+	+	-	-

Fórmulas de reducción

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\operatorname{tag}(-x) = \operatorname{tag} x$

$\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$

$\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$

$\operatorname{tag}(\pi/2 - x) = \cot x$

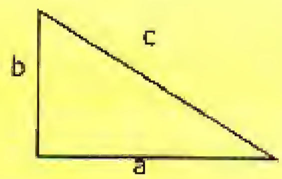
$\operatorname{sen}(\pi/2 + x) = \cos x$

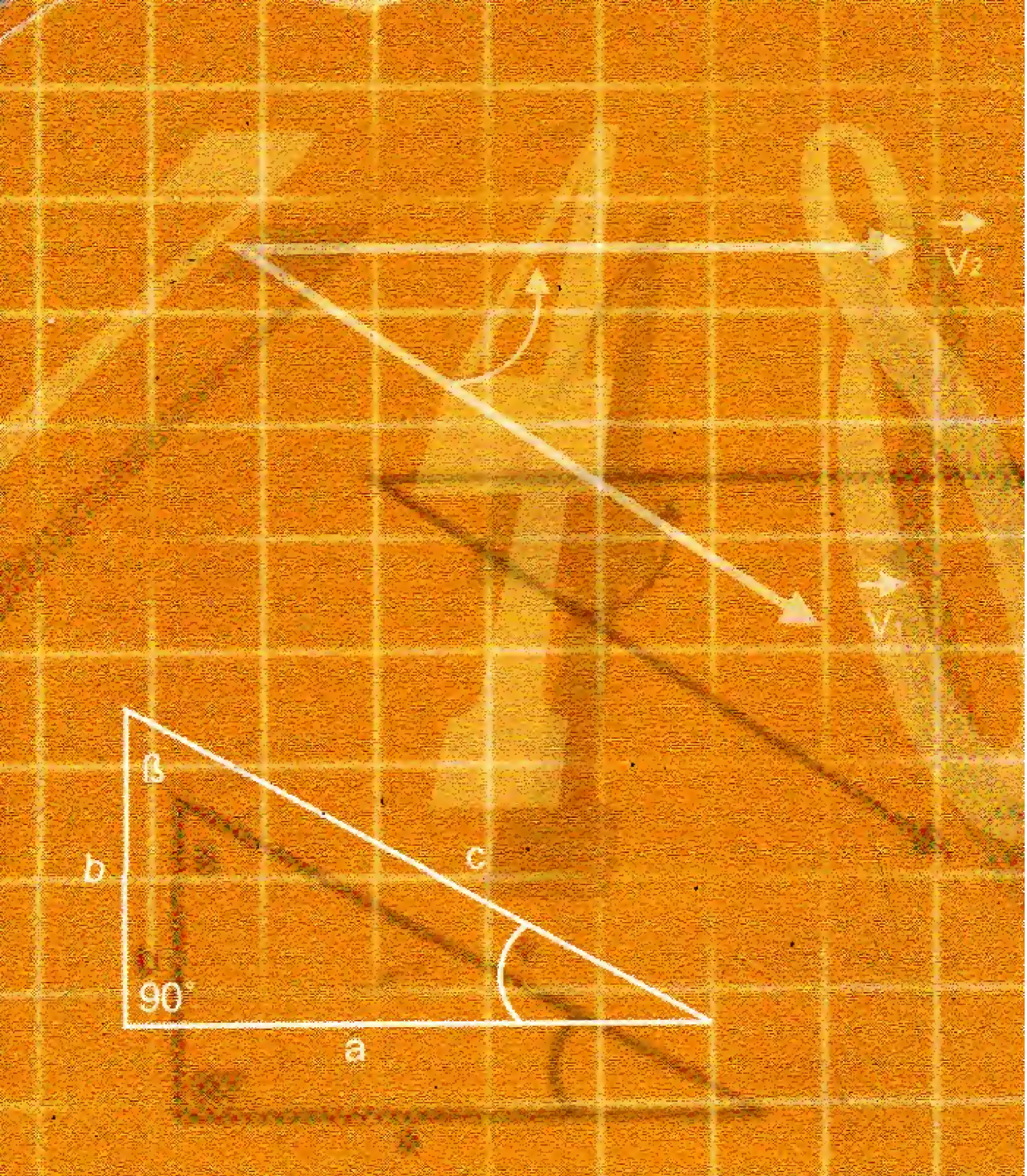
$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

Teorema de Pitágoras

$c^2 = a^2 + b^2$





7 591369 557159 01

DISTRIBUIDORES:

DISTRIBUIDORA ESCOLAR, S.A.

DISCOLAR

Calle Lebrún, Edif. Bloque De Armas - Petare

SUCURSALES:

MARACAIBO, BARQUISIMETO,
SAN CRISTÓBAL, VALENCIA,
CIUDAD BOLÍVAR, MATURÍN, VALERA,
BARCELONA, MARACAY, CORO,
PUERTO ORDAZ, PORLAMAR, CUMANÁ,
GUANARE, MÉRIDA,
SAN JUAN DE LOS MORROS